Espaces de distributions sur des ouverts periodiques et applications

G. Nguet Seng

IRIA

CENTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.954 90 20

Rapports de Recherche

N° 172

ESPACES DE DISTRIBUTIONS SUR DES OUVERTS PÉRIODIQUES ET APPLICATIONS

Gabriel NGUETSENG

Novembre 1982

ESPACES DE DISTRIBUTIONS SUR DES OUVERTS PERIODIQUES ET APPLICATION

Gabriel NGUETSENG

Résumé :

Dans l'espace $\mathbb{R}^n$ on se donne $Y = \prod_{i=1}^{n}]0, a_i[$, un ouvert connexe Ω_o engendré par Y-périodicité par un ouvert Y_o de Y, et vérifiant des propriétés convenables. On considère l'ensemble $\mathcal{D}_{per}(\bar{Y})$ des fonctions de classe C^∞ sur $\bar{Y}$ telles que $D^\alpha\psi$ prenne des valeurs égales sur les faces opposées de Y pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\mathcal{D}_{per}(Y_o)$ l'ensemble des fonctions $\psi \in \mathcal{D}_{per}(\bar{Y})$, à support (compact) dans $\Omega_o \cap \bar{Y}$. On définit sur ces ensembles des topologies appropriées et l'on établit un isomorphisme entre le dual $\mathcal{D}'_{per}(\bar{Y})$ (resp. $\mathcal{D}'_{per}(Y_o)$) et l'ensemble des distributions Y-périodiques sur $\mathbb{R}^n$ (resp. Ω_o).

Grâce à cette propriété, on peut associer à $\mathcal{D}'_{per}(\bar{Y})$ (resp. $\mathcal{D}'_{per}(Y_o)$) divers espaces de fonctions périodiques, et ramener à Y (resp. Y_o) les problèmes périodiques posés dans $\mathbb{R}^n$ (resp. Ω_o).

Enfin un exemple "concret" est étudié (Problème de Stokes périodique dans Ω_o) en vue d'une application à l'homogénéisation et à quelques problèmes raides périodiques.

Abstract :

In the space $\mathbb{R}^n$ we define $Y = \prod_{i=1}^{n}]0, a_i[$, and we consider a connected domain Ω_o spanned by Y-périodicity by a suitable open subset Y_o of Y. We define the set $\mathcal{D}_{per}(\bar{Y})$ of C^∞ functions on $\bar{Y}$ such that $D^\alpha\psi$ takes equal values on opposite faces of Y for every $\alpha \in \mathbb{N}^n$, and its subset $\mathcal{D}_{per}(Y_o)$ consisting of functions with compact support in $\Omega_o \cap \bar{Y}$. We provide these sets with appropriate topologies and we show that the dual space $\mathcal{D}'_{per}(\bar{Y})$ (resp. $\mathcal{D}'_{per}(Y_o)$) and the set of Y-périodic distributions on $\mathbb{R}^n$ (resp. Ω_o) are isomorphic.
With the help of this property we can define various spaces of periodic functions based on $\mathcal{D}'_{per}(\bar{Y})$ (resp. $\mathcal{D}'_{per}(Y_o)$), and therefore, solve on Y (resp. Y_o) the periodic problems considered in $\mathbb{R}^n$ (resp. Ω_o).
At last, a "concrete" example is studied (periodic Stokes problem in Ω_o) in vue of an application to homogenization and some stiff periodic problems.

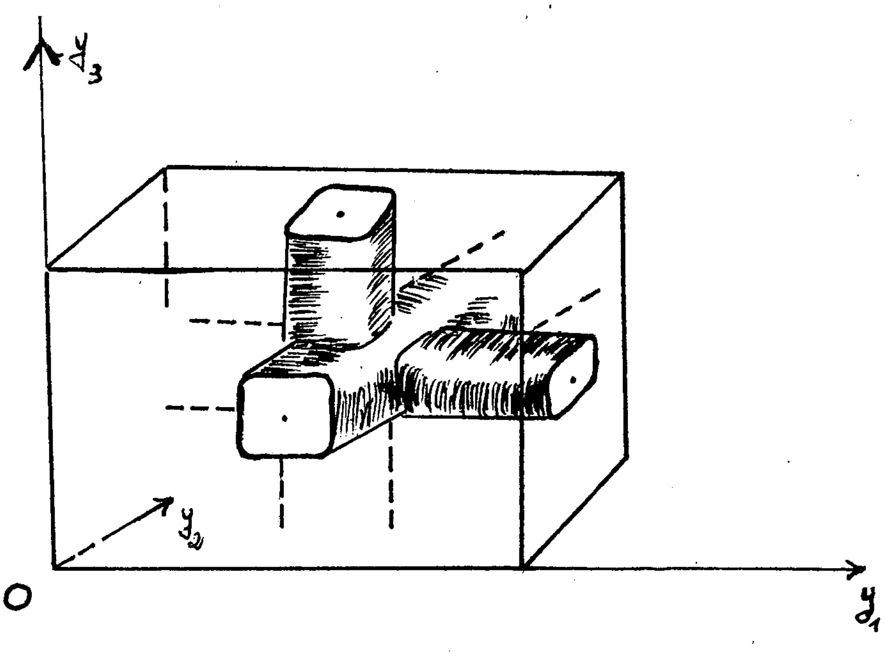
MOTIVATIONS PHYSIQUES

Cette étude est motivée par un problème d'homogénéisation pour un mélange solide-fluide ayant une structure géométrique périodique. Le problème d'homogénéisation considéré dépend de deux paramètres : ε associé à la période du milieu (cf. BENSOUSSAN-LIONS-PAPANICOLAOU [1], SANCHEZ-PALENCIA [1]), et un petit paramètre η caractéristique de l'ordre de grandeur de la viscosité du fluide. L'homogénéisation (pour η fixé) du mélange solide-fluide fournit des coefficients homogénéisés qui dépendent naturellement de η . En étudiant le comportement asymptotique (pour $\eta \to 0$) de ces coefficients (cf. NGUETSENG [1]) on est confronté à quelques difficultés techniques sur le plan de l'analyse fonctionnelle. Nous nous proposons dans ce travail de résoudre ces difficultés. Précisons d'abord leur nature :

On se donne dans l'espace $\mathbb{R}^3$ (d'élément générique $y = (y_i)$) un parallélépipède

$$Y = \left]0, a_1\right[\times \left]0, a_2\right[\times \left]0, a_3\right[$$

avec :



$$Y = Y_f \cup Y_s \cup \gamma_o$$

où Y_f et Y_s sont deux ouverts, et γ_o leur frontière commune.

L'ensemble Y_f est constitué de trois tubes cylindriques dans les directions des axes de coordonnées, de longueurs respectives a_1, a_2, a_3, et d'intersection non vide (voir figure).

A l'intérieur de Y_f s'écoule un fluide visqueux compressible de coefficients de viscosité $\eta\lambda$, $\eta\mu$ (λ et μ sont des constantes, $\mu > 0$) où η est un petit paramètre destiné à tendre vers zéro.
L'ensemble Y_s est constitué par un solide élastique, de coefficients d'élasticité a^s_{ijkh}. Ces coefficients ne dépendent pas du paramètre η , et vérifient les conditions habituelles de symétrie et d'ellipticité.

La frontière γ_o est supposée suffisamment régulière.

Pour i, j, s donnés ($1 \leq i,j \leq 3$; $s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s) > s_o$, $s_o > 0$) on considère le problème bien posé (cf. Sanchez-Palencia [1]) :

$$u^{ij}_\eta(s) \in \underline{H}^1(Y) = (H^1(Y))^3$$

$$(P_\eta) \qquad u^{ij}_\eta(s) \quad \text{Y-périodique}$$

$$a(u^{ij}_\eta(s), v) + s\eta\, b(u^{ij}_\eta(s), v) = (\theta_{ij} + s\eta\, \tau_{ij}, v)_Y \ , \ \forall v \in \underline{H}^1(Y) \ \text{v Y-périodique}$$

("v Y-périodique" signifie que v prend des valeurs égales sur les faces opposées de Y)
pour tout $\eta > 0$
où

$$a(u,v) = \int_{Y_s} a^s_{ijhk}\, e_{kh}(u) e_{ij}(\bar{v})dy + \gamma \int_{Y_f} \operatorname{div} u .\ \operatorname{div} \bar{v}\, dy \qquad (\gamma > 0)$$

$$b(u,v) = 2\mu \int_{Y_f} e_{ij}(u)\ e_{ij}(\bar{v})dy + \lambda \int_{Y_f} \operatorname{div} u .\ \operatorname{div} \bar{v}\, dy$$

$$(\theta_{ij}, v)_Y = - \int_{Y_s} a^s_{ijkh}\, e_{kh}(\bar{v})dy - \gamma\, \delta_{ij} \int_{Y_f} \operatorname{div} \bar{v}\, dy \qquad (\ \delta_{ij} \text{ le symbole de Kronecker})$$

$$(\tau_{ij}, v)_Y = - 2\mu \int_{Y_f} e_{ij}(\bar{v})dy - \lambda\, \delta_{ij} \int_{Y_f} \operatorname{div} \bar{v}\, dy$$

$$e_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j}{\partial y_i}\right), \ u = (u_i).$$

Ce problème est du type "raide-périodique", et on s'intéresse à l'étude de son comportement asymptotique lorsque $\eta \to 0$.
La démarche indiquée est celle de Lions [1] . Elle conduit à des suites de problèmes du type Stokes périodique non homogène :

$$- \quad e_{ij,j}(u) + \nu \frac{\partial p}{\partial y_i} = 0 \quad \text{dans} \quad Y_f \qquad (\nu = - \frac{\lambda}{2\mu})$$

$$(SP)\quad \begin{cases} \operatorname{div} u = g_s \text{ dans } Y_f \\ u|_{\gamma_o} = \Phi_s \\ u \text{ Y-périodique} \end{cases}$$

où

$$e_{ij,j}(u) = \sum_j \frac{\partial \dot{e}_{ij}}{\partial y_j}(u)$$

Φ_s et g_s sont respectivement la trace sur γ_o d'une fonction connue $u_s \in \underline{H}^1(Y_s)$, u_s Y-périodique, et l'intégrale sur Y_s d'une quantité dépendant de la divergence de cette même fonction.

Notons que dans (SP) la condition "u Y-périodique" est une conséquence immédiate du fait que le domaine fluide Y_f "touche" le bord de Y. Cette propriété de Y_f (qui fait d'ailleurs l'originalité du problème asymptotique (P_η)) entraîne des difficultés techniques à deux niveaux :

- la condition "u Y-périodique" dans (SP) rend inadéquate l'utilisation des espaces fonctionnels habituels associés à l'étude des équations de Stokes (cf. R. Témam [1]). Nous devons alors construire des espaces fonctionnels convenables dans lesquels nous puissions espérer la résolution des problèmes du type (SP).
- la fonction Φ_s dans (SP) étant la trace sur γ_o d'une fonction Y-périodique $u_s \in \underline{H}^1(Y_s)$, nous devons pouvoir la relever dans $\underline{H}^1(Y_f)$ sans perdre la Y-periodicité, et il est souhaitable que ce relèvement soit continu.

En conséquence, l'étude du problème asymptotique (P_η) nous semble nécessiter quelques développements d'ordres fonctionnel et topologique.

Le problème raide (P_η) constitue en réalité une étape (au niveau local) de l'étude asymptotique (via la théorie de l'homogénéisation) des équations aux dérivées partielles gouvernant les petites vibrations du mélange du fluide et du solide précédents. Le problème est posé dans un ouvert borné Ω (suffisamment régulier) et dépend de deux paramètres : le paramètre η introduit précédemment, et le petit paramètre ε de la méthode d'homogénéisation. La structure géométrique du mélange est périodique, de période de base εY, où $Y = Y_f \cup Y_s \cup \gamma_o$. La condition au bord de Ω est $u = 0$, et le problème est évolutif. Dans $(P\eta)$, les $u_\eta^{ij}(s)$ désignent les fonctions périodiques à l'aide desquelles sont définis les coefficients homogénéisés $q_{ijkh}^{\eta}(s)$ résultant d'un premier passage à la limite $\varepsilon \to 0$. La variable complexe s est l'image de t (le temps) par la transformation de Laplace (qui permet de simplifier le problème

local). Le deuxième passage à la limite $\eta \to 0$ est l'étape finale de la résolution du problème du mélange fluide-solide posé, et passe nécessairement par l'étude du problème asymptotique ($P\eta$).
Telle est, essentiellement, la motivation de l'étude qui suit.

INTRODUCTION

L'objet de ce travail est de caractériser, sur la période de base, les distributions périodiques définies dans $\mathbb{R}^n$ tout entier, ou sur un ouvert convenable de $\mathbb{R}^n$.
Nous savons qu'il est suffisant, pour connaître une fonction périodique (par exemple dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$), de l'identifier sur la période de base. Par exemple (Bensoussan-Lions-Papanicolaou [1]) si la période de base est $Y = \prod_{i=1}^{n}]0, a_i[$ toute fonction $U \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, U Y-périodique, est identifiable à une (unique) fonction $u \in H^1(Y)$ telle que les traces de u sur deux faces opposées quelconques de Y soient égales. Dans ce travail nous montrons que toute distribution périodique (définie dans $\mathbb{R}^n$ ou sur un ouvert convenable de $\mathbb{R}^n$) est identifiable à une "distribution" définie sur la période de base ; l'ensemble de ces "distributions" étant, à un isomorphisme près, l'espace des distributions sur le tore engendré par la période de base. Outre qu'elle nous évite de travailler sur le tore et par là, d'être confrontés à des difficultés inhérentes à la topologie algèbrique, cette description nous permet d'obtenir des propriétés locales (i.e. dans la période de base) utiles dans l'étude des problèmes aux limites périodiques, notamment les problèmes de transmission du type indiqué plus haut.

Cette étude est composée de 3 parties ou sections.
La section I présente le cadre dans lequel s'effectue notre étude, et donne les principaux résultats (Vo-Khac Khoan [2]) qui lui servent de base.

La section II donne une caractérisation des distributions périodiques définies dans $\mathbb{R}^n$, la période de base étant $Y = \prod_{j=1}^{n}]0, a_i[$. L'espace, noté $\mathcal{D}'_{per}(\bar{Y})$, auquel s'identifie l'espace des distributions périodiques jouit de propriétés (du moins celles de ses propriétés qui nous intéressent ici) analogues à celle de $\mathcal{D}'(Y)$ (l'espace des distributions sur Y). Par exemple, pour $u \in \mathcal{D}'_{per}(\bar{Y})$, $\frac{\partial u}{\partial y_i}$ est défini de façon convenable et cohérente. De plus on a $L^2(Y) \subset \mathcal{D}'_{per}(\bar{Y})$; de sorte que pour $u \in L^2(Y)$, $\frac{\partial u}{\partial y_i}$ (au sens de $\mathcal{D}'_{per}(\bar{Y})$) peut agir sur des fonctions test appartenant à un espace plus grand que $\mathcal{D}(Y)$: l'espace $\mathcal{D}_{per}(\bar{Y})$ des fonctions ψ de classe C^∞ sur $\bar{Y}$ telles que $D^\alpha\psi$ prenne des valeurs égales sur les faces opposées de Y, pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_j) \in \mathbb{N}^n$.

La section III est consacrée à la caractérisation des distributions périodiques définies sur un ouvert Ω_o. Cet ouvert est engendré (par Y-périodicité) par un ouvert convenable Y_o contenu dans la période de base Y. On suppose que le bord $\partial\Omega_o$ de Ω_o est suffisamment régulier. Afin d'obtenir l'espace $\mathcal{D}'_{per}(Y_o)$ nous définissons et étudions un espace nouveau (à notre connaissance) : l'espace des distributions sur Ω_o, localement à support borné. Cette notion est une généralisation des notions de distribution à support borné, et de distribution à support compact. Elle ne dépend pas de l'ouvert Ω_o.

La fin de cette section (i.e. § 5) étudie l'existence des solutions périodiques de l'équation

$$\frac{\partial T}{\partial y_i} = S \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega_o) \quad (\text{où } S \in \mathcal{D}'(\Omega_o) \text{ est donné, et est Y-périodique})$$

où Ω_o désigne exclusivement l'ouvert engendré (par Y-périodicité) par l'ensemble Y_f (réunion de tubes cylindriques) introduit précédemment (cf. "Motivations physiques").

On obtient une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation précédente admette des solutions périodiques, et on en tire des conséquences utiles.

Nous n'avons pas trouvé de réponse à la question de savoir si une telle équation peut être résolue sur un ouvert quelconque $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, invariant par Y-périodicité.

I - NOTATIONS ET RAPPEL DE QUELQUES RESULTATS FONDAMENTAUX.

1. - Notations et hypothèses.

On notera $y = (y_i)$ l'élément générique de l'espace $\mathbb{R}^n$, $\lambda = (\lambda_i)$ celui de $\mathbb{Z}^n$ ($\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs), et $\alpha = (\alpha_i)$ celui de $\mathbb{N}^n$ ($\mathbb{N}$ étant l'ensemble des entiers naturels).

Dans tout ce travail, le point (de $\mathbb{R}^n$)

$$(1.1) \qquad a = (a_i),\ a_i > 0$$

est donné, et fixé une fois pour toutes.

Au point a est associé le parallélépipède

$$(1.2) \qquad Y = \prod_{i=1}^{n} \left]0, a_i\right[.$$

On note Γ (= ∂Y) le bord de Y ; on désigne par

(1.3) $\pi(y_i = 0)$ (resp. $\pi(y_i = a_i)$) la partie de Γ contenue dans l'hyperplan d'équation $y_i = 0$ (resp. $y_i = a_i$).

Nous appellerons

(1.4) faces opposées de Y, deux parties de Γ telles que $\pi(y_i=0)$, $\pi(y_i=a_i)$.

Avec la notation (1.3), le bord de Y s'exprime

$$(1.5) \qquad \Gamma = \partial Y = \bigcup_{i=1}^{n} (\pi(y_i=0) \cup \pi(y_i=a_i)).$$

Dans cette étude on suppose que l'ouvert Y est de la forme

$$(1.6) \qquad Y = Y_s \cup Y_f \cup \gamma_o$$

où Y_s et Y_f sont deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, de frontière commune γ_o.

On notera

(1.7) Y_o l'un quelconque des ouverts Y_s, Y_f

(on verra par la suite que les conditions, dans ce N° 1, imposées à l'un sont vérifiées par l'autre).

On introduit la base canonique $\{e_i\}$ $(1 \le i \le n)$ de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, et l'on pose, pour tout i $(1 \le i \le n)$

(1.8) $\quad b_i = a_i e_i$ (vecteur parallèle à e_i, de mesure algébrique $a_i > 0$).

On remarque alors que

(1.9) $\quad \pi(y_i = a_i) = \pi(y_i = 0) + b_i \quad \forall i.$

On définit

(1.10) $\quad \Gamma_o^i = \partial Y_o \cap \pi(y_i = 0)$

(∂Y_o désigne le bord de Y_o)

(1.11) $\quad \check{\Gamma}_o^i = \Gamma_o^i + b_i$

(1.12) $\quad \Gamma_o = \partial Y_o \cap \Gamma$

(1.13) $\quad \bar{Y}_o$ = adhérence de Y_o

(1.14) $\quad \bar{\bar{Y}}_o = \bar{Y}_o - \gamma_o$

(γ_o étant la frontière ((1.6)) entre Y_s et Y_f).
On suppose que l'ouvert Y_o vérifie les conditions suivantes :

(1.15) $\quad Y_o$ est connexe

(1.16) $\quad$ mes $\Gamma_o^i \ne 0 \quad \forall i$

(mes Γ_o^i désigne la mesure de Γ_o^i par rapport à la mesure superficielle ds induite par dy)

(1.17) $\quad \Gamma_o = \bigsqcup_{i=1}^{n} (\Gamma_o^i \cup \check{\Gamma}_o^i)$

(1.18) $\quad$ la frontière γ_o est suffisamment régulière
et

(1.19) $\quad$ se prolonge par Y-périodicité à $\mathbb{R}^n$ en une hypersurface suffisamment régulière.

On désignera par

(1.20) $\quad a_\lambda$ le vecteur de composantes $\lambda_i a_i$ $(1 \le i \le n)$

où les λ_i sont les coordonnées d'un point quelconque $\lambda \in \mathbb{Z}^n$,

(1.21) $\quad \tau_\lambda$ (resp. $\tau_{-\lambda}$) l'opérateur translation associé au vecteur a_λ (resp. $-a_\lambda$)

On rappelle que τ_λ agit sur une fonction ϕ comme suit :

$$(\tau_\lambda \phi)(y) = \phi(y - a_\lambda).$$

On notera Ω_o l'ouvert de $\mathbb{R}^n$ engendré par Y-périodicité par Y_o, i.e.

(1.22) $$\Omega_o = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} (\overline{\overset{\circ}{Y}_o} + a_\lambda)$$

$(\overline{\overset{\circ}{Y}_o}$ étant défini en (1.14)). On remarquera que

(1.23) $\quad \Omega_o$ est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$

et que (grâce à la condition (1.17))

(1.24) $\quad \Omega_o$ est invariant par Y-périodicité

i.e. Ω_o est globalement invariant par toute translation de vecteur a_λ((1.20)).
En outre (grâce à (1.18)(1.19))

(1.25) $\quad \Omega_o$ est un ouvert suffisamment régulier

son bord étant donné par

(1.26) $$\partial\Omega_o = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} (\bar{\gamma}_o + a_\lambda)$$

où l'on note $\bar{\gamma}_o$ l'adhérence de γ_o dans Γ_o ((1.12)).

(1.27) $\quad$ On notera γ le bord $\partial\Omega_o$.

Enfin, on peut voir facilement (en effectuant un raccordement convenable le long de γ, i.e. $\partial\Omega_o$) qu'il existe un ouvert connexe $\mathcal{O}_o$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant les conditions suivantes :

(1.28) $\mathcal{O}_o \subset \Omega_o$, $\mathcal{O}_o$ borné

(1.29) $\mathcal{O}_o$ est un ouvert suffisamment régulier

(1.30) il existe deux entiers $n_o, n_1 \in \mathbb{N}^*$ ($n_1 > n_o$, n_o aussi grand qu'on le désire) tels qu'on ait

$\Omega_{on_o} \subset \mathcal{O}_o \subset \Omega_{on_1}$ (inclusions strictes)

où

$$\Omega_{on_o} = \bigcup_{\substack{\lambda \in \mathbb{Z}^n \\ |\lambda| \leq n_o}} (\mathring{\bar{Y}}_o + a_\lambda) \quad , \quad \Omega_{on_1} = \bigcup_{\substack{\lambda \in \mathbb{Z}^n \\ |\lambda| \leq n_1}} (\mathring{\bar{Y}}_o + a_\lambda)$$

(on note $|\lambda| = |\sum_{i=1}^{n} \lambda_i|$).

2. - Rappels de quelques résultats fondamentaux.

Les notations et les définitions utilisées dans ce paragraphe sont dans Vo-Khac Khoan [2] (voir aussi L. Schwartz [1]). On renvoie à cet auteur pour tous les détails concernant les résultats de ce paragraphe.

2.1. Notations et définitions.

On note :

(2.1) $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions définies et de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^n$

(2.2) $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ le dual de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, identifié (L. Schwartz [1]) à l'ensemble des distributions $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, à support compact

(2.3) $\mathcal{P}(T^n)$ le sous-espace fermé de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, constitué des fonctions Y-périodiques

(2.4) $\mathcal{Q}(T^n)$ le sous-espace fermé de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, constitué des distributions Y-périodiques

(2.5) $\mathcal{P}'(T^n)$ le dual de $\mathcal{P}(T^n)$.

Pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (i.e. $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, à support compact) on pose

(2.6) $\bar{\omega}\phi = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} \tau_\lambda \phi$ (la transformée périodique de ϕ)

(τ_λ est défini en (1.21)).

On a $\bar{\omega}\phi \in \mathcal{P}(T^n)$, et

(2.7) $\bar{\omega}$ est un opérateur continu de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Pour tout $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, on définit aussi la transformée périodique $\bar{\omega}T$ par

(2.8) $\langle \bar{\omega}T, \phi \rangle = \langle T, \bar{\omega}\phi \rangle \quad \forall\, \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

(voir Vo-Khac Khoan [1] ou L. Schwartz [1] pour la définition précise du deuxième membre de (2.8)).

On a $\bar{\omega}T \in \mathcal{Q}(T^n)$, et

(2.9) $\bar{\omega}$ est un opérateur continu de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

On pose (comme en (2.6) ; ceci a un sens car le support de T est compact)

(2.10) $\bar{\omega}T = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} \tau_\lambda T.$

Notons enfin qu'il existe une fonction θ vérifiant

(2.11) $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\bar{\omega}\theta = 1$.

Une telle fonction sera appelée une $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-partition périodique de l'unité.

2.2. Un Théorème d'isomorphisme.

Lemme 2.1 : Toute fonction $\psi \in \mathcal{P}(T^n)$ s'écrit $\psi = \bar{\omega}\phi$, $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Toute distribution $U \in \mathcal{Q}(T^n)$ est de la forme $U = \bar{\omega}\, w$, $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. ∎

Le Lemme 2.1 et tout ce qui précède permettent d'établir le résultat fondamental suivant (cf. Vo-Khac Khoan [2], p. 64)

Théorème 2.1 : Les espaces vectoriels topologiques $\mathcal{P}'(T^n)$ et $\mathcal{Q}(T^n)$ sont isomorphes (algébriquement et topologiquement). ∎

On rappelle que les applications linéaires continues (chacune étant l'inverse de l'autre) qui associent $\mathcal{P}'(T^n)$ et $\mathcal{Q}(T^n)$ dans le Théorème 2.1 sont notées ${}^t\theta$, ${}^t\bar{\omega}$, et définies comme suit :

$$(2.12) \qquad \langle {}^t\theta U,\psi\rangle_{T^n} = \langle U,\theta\psi\rangle \ , \ U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \quad \forall\psi \in \mathcal{P}(T^n)$$

$$(2.13) \qquad \langle {}^t\bar{\omega}\hat{u},\phi\rangle = \langle \hat{u},\bar{\omega}\phi\rangle_{T^n} \ , \ \hat{u} \in \mathcal{P}'(T^n), \quad \forall\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

où $\langle\ ,\ \rangle_{T^n}$ (resp. $\langle\ ,\ \rangle$) désigne le produit de dualité entre $\mathcal{P}'(T^n)$ (resp. $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$) et $\mathcal{P}(T^n)$ (resp. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$), et où θ satisfait à (2.11). ■

II - DISTRIBUTIONS PERIODIQUES DEFINIES DANS L'ESPACE $\mathbb{R}^n$ TOUT ENTIER. CARACTERISATION SUR LA PERIODE DE BASE.

1. - L'espace $\mathcal{D}_{per}(\bar{Y})$.

1.1. Notations.

On note

(1.1) $\qquad R = |_Y$ l'application (linéaire) restriction à Y

(1.2) $\qquad \bar{R} = |_{\bar{Y}}$ l'application (linéaire) restriction à $\bar{Y}$

($\bar{Y}$ = adhérence de Y (Sect. I ; (1.2))

(1.3) $\qquad$ P = l'application (linéaire) prolongement à $\mathbb{R}^n$ par Y-périodicité

(1.4) $\qquad \mathcal{D}(Y)$ = l'espace des fonctions définies et de classe C^∞ sur Y, à support compact dans Y.

On identifiera (cela est loisible) toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(Y)$ à son prolongement par 0 hors de Y. On remarquera que les applications R et $\bar{R}$ coïncident sur $\mathcal{D}(Y)$. Pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, on posera

$$(1.5) \qquad p_{K,m}(\psi) = \sup_{\substack{y\in K \\ |\alpha|\le m}} |D^\alpha\psi(y)|$$

(où $\alpha = (\alpha_i) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$).

1.2. Une autre définition de la topologie de l'espace $\mathcal{P}(T^n)$.

On rappelle (cf. Vo-Khac Khoan [1]) que la topologie de l'espace (de Fréchet) $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ (Sect. I ; (2.1)) est définie à l'aide de la famille de semi-normes $p_{K,m}$, où K parcourt l'ensemble des compacts de $\mathbb{R}^n$ et où m décrit l'ensemble $\mathbb{N}$. En outre, l'espace $\mathcal{P}(T^n)$ (cf. (2.3) Sect. I) est un espace de Fréchet pour la topologie induite par $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ (en effet $\mathcal{P}(T^n)$ est fermé dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$).

On va montrer qu'il est suffisant de définir la topologie de $\mathcal{P}(T^n)$ à l'aide de la famille (dénombrable) de semi-normes $p_{\bar{Y},m}$ $(m \in \mathbb{N})$. On a la

Proposition 1.1 : La topologie définie sur $\mathcal{P}(T^n)$ à l'aide de la famille de semi-normes $p_{\bar{Y},m}$ $(m \in \mathbb{N})$ est identique à celle induite par $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration : Il suffit de montrer qu'on a, dans $\mathcal{P}(T^n)$

(1.6) $\quad p_{K,m} \le p_{\bar{Y},m}$ pour tout compact K et pour tout $m \in \mathbb{N}$

c'est-à-dire que, pour tout compact K, et pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$p_{K,m}(\psi) \le p_{\bar{Y},m}(\psi) \qquad \forall\, \psi \in \mathcal{P}(T^n).$$

En effet tout compact K est contenu dans un ensemble (dépendant de K) de la forme $P_N^K = \bigcup_{k=1}^{N} \bar{Y}_k$ $(N \in \mathbb{N}$, fini), où $Y_1, \ldots, Y_N$ sont des translatées convenables de la période Y. On en déduit alors l'inégalité (1.6) grâce à la Y-périodicité. ∎

1.3. L'espace vectoriel topologique $\mathcal{D}_{per}(\bar{Y})$.

On définit l'ensemble suivant

(1.7) $$\mathcal{D}_{per}(\bar{Y}) = \{\psi \mid \psi \text{ défini et de classe } C^\infty \text{ sur } \bar{Y},\ D^\alpha\psi \text{ Y-périodique pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n\},$$

où "$D^\alpha\psi$ Y-périodique" signifie que $D^\alpha\psi$ prend des valeurs égales sur les faces opposées de Y (cf. (1.4), Sect. I).

On vérifie facilement que l'application $\bar{R}$ (resp. P) est une injection de $\mathcal{P}(T^n)$ (resp. $\mathcal{D}_{per}(\bar{Y})$) dans $\mathcal{D}_{per}(\bar{Y})$ (resp. $\mathcal{P}(T^n)$), et que $\bar{R}\circ P$ (resp. $P\circ\bar{R}$) est l'identité de $\mathcal{D}_{per}(\bar{Y})$ (resp. $\mathcal{P}(T^n)$). Donc les espaces vectoriels $\mathcal{D}_{per}(\bar{Y})$ et $\mathcal{P}(T^n)$ sont algébriquement isomorphes. Ceci nous permet de définir (par transfert) sur $\mathcal{D}_{per}(\bar{Y})$ une topologie (compatible avec la structure d'espace vectoriel) à l'aide des semi-normes $p_{\bar{Y},m}$.

Ainsi structuré, l'espace

(1.8) $\mathcal{D}_{per}(\bar{Y})$ est un espace de Fréchet

(cela résulte de la Proposition 1.1 et du fait que $\mathcal{P}(T^n)$ est un Fréchet).
On a aussitôt la

<u>Proposition 1.2</u> : Les espaces vectoriels topologiques $\mathcal{D}_{per}(\bar{Y})$ et $\mathcal{P}(T^n)$ sont isomorphes (algébriquement et topologiquement).

<u>Preuve</u> : Par définition même de la topologie naturelle de $\mathcal{D}_{per}(\bar{Y})$, les applications $\bar{R}$ et P sont continues.

<u>Remarque 1.1</u> : En identifiant toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(Y)$ à son prolongement par 0 hors de Y on a l'inclusion algébrique

(1.9) $\mathcal{D}(Y) \subset \mathcal{D}_{per}(\bar{Y})$

d'où il résulte que

(1.10) $\mathcal{D}_{per}(\bar{Y})$ est dense dans $L^2(Y)$

($L^2(Y)$ = espace des fonctions de carré intégrable sur Y). ∎

2. - <u>L'espace</u> $\mathcal{D}'_{per}(\bar{Y})$.

On note

(2.1) $\mathcal{D}'_{per}(\bar{Y})$ le dual de l'espace $\mathcal{D}_{per}(\bar{Y})$.

On munira $\mathcal{D}'_{per}(\bar{Y})$ de la topologie faible du dual. Pour $u \in \mathcal{D}'_{per}(\bar{Y})$, et $\psi \in \mathcal{D}_{per}(\bar{Y})$, on notera (pour simplifier) $\langle u,\psi\rangle$ la valeur de u au point ψ.

Notons qu'une forme linéaire u sur $\mathcal{D}_{per}(\bar{Y})$ est continue (i.e. $u \in \mathcal{D}'_{per}(\bar{Y})$) si, et seulement si est réalisée la condition suivante :

il existe $m \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels qu'on ait

$$|\langle u,\psi\rangle| \leq C p_{\bar{Y},m}(\psi) \quad \forall \psi \in \mathcal{D}_{per}(\bar{Y}). \blacksquare$$

2.1. Un théorème d'isomorphisme.

On a le lemme suivant

Lemme 2.1 : Les espaces vectoriels topologiques $\mathcal{D}'_{per}(\bar{Y})$ et $\mathcal{P}'(T^n)$ sont isomorphes (algébriquement et topologiquement).

Démonstration : Elle est évidente. Le Lemme 2.1 s'obtient par transposition à partir de la Proposition 1.2. ∎

Le résultat suivant découle de tout ce qui précède :

Théorème 2.1 : Les espaces vectoriels topologiques $\mathcal{D}'_{per}(\bar{Y})$ et $\mathcal{Q}(T^n)$ sont algébriquement et topologiquement isomorphes ($\mathcal{D}'_{per}(\bar{Y})$ et $\mathcal{Q}(T_n)$ étant tous deux munis de la topologie faible du dual).

Démonstration : Ce résultat se déduit aisément du Lemme 2.1 ci-dessus et du Théorème 2.1 (I, §2). ∎

On vient ainsi de montrer que toute distribution Y-périodique $U \in \mathcal{Q}(T^n)$ est associée de façon unique à un $u \in \mathcal{D}'_{per}(\bar{Y})$, et inversement. Cette correspondance est linéaire continue, et s'exprime par les relations

$$u = {}^tP\,{}^t\theta\, U \tag{2.2}$$

$$U = {}^t\bar{\omega}\,{}^t\bar{R}u \tag{2.3}$$

où (voir sect. I (2.12)(2.13) pour les définitions de ${}^t\theta$ et ${}^t\bar{\omega}$) ${}^tP\,{}^t\theta$ est un isomorphisme de $\mathcal{Q}(T^n)$ sur $\mathcal{D}'_{per}(\bar{Y})$, ayant pour inverse ${}^t\bar{\omega}\,{}^t\bar{R}$.

Nous appellerons encore distributions périodiques (de période Y) les éléments de $\mathcal{D}'_{per}(\bar{Y})$.

Remarque 2.1 : Si $u \in \mathcal{D}'_{per}(\bar{Y})$ et $U \in \mathcal{Q}(T^n)$ sont associés par (2.2) et (2.3), on a par définition de la transposée d'une application :

$$\langle u,\psi\rangle = \langle U,\theta P\psi\rangle \ , \quad \psi \in \mathcal{D}_{per}(\bar{Y}) \tag{2.4}$$

$$\langle U,\phi\rangle = \langle u,\bar{R}\,\bar{\omega}\phi\rangle \ , \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{2.5}$$

On vérifie que

(2.6) $\quad \bar{\omega}\phi = P\phi \,, \quad \forall\ \phi \in \mathcal{D}(Y)$

de sorte qu'en prenant dans (2.4) $\phi \in \mathcal{D}(Y)$ on a

(2.7) $\quad \langle u,\phi\rangle = \langle U,\phi\rangle \quad \forall\ \phi \in \mathcal{D}(Y).$

Dans tout ce travail, l'espace $L^2(Y)$ sera identifié à son dual ; de sorte qu'on a (grâce à (1.10) et à la continuité de l'injection $\mathcal{D}_{per}(\bar{Y}) \subset L^2(Y)$)

(2.8) $\quad L^2(Y) \subset \mathcal{D}'_{per}(\bar{Y}).$

La relation (2.8) signifie qu'on identifie tout $u \in L^2(Y)$ et l'élément $\tilde{u} \in \mathcal{D}'_{per}(\bar{Y})$ défini par : $\langle\tilde{u},\psi\rangle = \int_Y u\psi\, dy,\ \psi \in \mathcal{D}_{per}(\bar{Y}).$

2.2. La dérivation dans $\mathcal{D}'_{per}(\bar{Y})$.

Pour $u \in \mathcal{D}'_{per}(\bar{Y})$, on définit la dérivée partielle $\frac{\partial u}{\partial y_i}$ par

(2.10) $\quad \langle\frac{\partial u}{\partial y_i},\psi\rangle = -\langle u, \frac{\partial \psi}{\partial y_i}\rangle\,, \quad \psi \in \mathcal{D}_{per}(\bar{Y}).$

On vérifie facilement, grâce à la continuité (évidente) sur $\mathcal{D}_{per}(\bar{Y})$ de l'application linéaire

(2.11) $\quad \psi \to \frac{\partial \psi}{\partial y_i}\,,$

que $\frac{\partial u}{\partial y_i} \in \mathcal{D}'_{per}(\bar{Y}).$

Notons que si u est une fonction périodique continue, ayant des dérivées partielles (au sens usuel) continues et périodiques, la définition précédente est cohérente avec la dérivation au sens usuel (vérification facile par intégration par parties).

Cette définition est complètement justifiée par le résultat suivant :

Proposition 2.1 : Soit $u \in \mathcal{D}'_{per}(\bar{Y})$, et soit $U \in \mathcal{Q}(T^n)$ donné par (2.3) (ou (2.2)), alors on a

(2.12) $\quad \frac{\partial u}{\partial y_i} = {}^tP\,{}^t\theta\, \frac{\partial U}{\partial y_i}$

($\frac{\partial u}{\partial y_i}$ est compris au sens de $\mathcal{D}'_{per}(\bar{Y})$ et $\frac{\partial U}{\partial y_i}$ au sens de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$).

<u>Démonstration</u> : On pose $z_i = {}^tP^t\theta \, \frac{\partial U}{\partial y_i}$. Alors on a pour tout $\psi \in \mathcal{D}_{per}(\bar{Y})$
$<z_i,\psi> =$ (cf. (2.4)) $<\frac{\partial U}{\partial y_i},\theta P\psi> = -<U, \frac{\partial}{\partial y_i}(\theta P\psi)$, d'où

(2.13) $$<z_i,\psi> = -<U,P\psi\cdot \frac{\partial\theta}{\partial y_i}> - <U,\theta\cdot \frac{\partial}{\partial y_i}(P\psi)> .$$

On va montrer que le premier terme du second membre (2.13) est nul.

Soit (cf. Lemme 2.1, Sect. I) $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tel que $U = \bar{\omega}\, w$. En utilisant la définition (2.8) Sect. I, on a $<U,P\psi\cdot \frac{\partial\theta}{\partial y_i}> = <w,\bar{\omega}(P\psi\cdot \frac{\partial\theta}{\partial y_i})>$. Mais (cf. Vo-Kha Khoan [2], p. 62) $\bar{\omega}(P\psi\cdot \frac{\partial\theta}{\partial y_i}) = P\psi\cdot\bar{\omega}(\frac{\partial\theta}{\partial y_i})$, donc $<U,P\psi\cdot \frac{\partial\theta}{\partial y_i}> = <w,P\psi\cdot\bar{\omega}(\frac{\partial\theta}{\partial y_i})>$.

La propriété suivante (qui se vérifie sans peine, car pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, la somme $\bar{\omega}\phi$ définie en (2.6), Sect. I, est en réalité une somme finie, et on a $\tau_\lambda \frac{\partial\phi}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial y_i}\tau_\lambda\phi \;\forall\lambda \in \mathbb{Z}^n$) nous conduira au résultat voulu :

(2.14) $$\bar{\omega}\,(\frac{\partial\phi}{\partial y_i}) = \frac{\partial}{\partial y_i}(\bar{\omega}\phi) \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

En effet en prenant dans (2.14) $\phi = \theta$ (θ étant défini (2.11), Sect. I) on obtient $\bar{\omega}\,(\frac{\partial\theta}{\partial y_i}) = 0$, d'où le résultat. Par conséquent le deuxième membre (2.13) se réduit à $-<U,\theta\cdot \frac{\partial}{\partial y_i}(P\psi)>$; or $\frac{\partial}{\partial y_i}(P\psi) = P\,\frac{\partial\psi}{\partial y_i}$ (vérification immédiate) donc
$-<U,\theta\cdot \frac{\partial}{\partial y_i}(P\psi)> = -<{}^tP^t\theta U, \frac{\partial\psi}{\partial y_i}> = -<u, \frac{\partial\psi}{\partial y_i}> =$ (cf. 2.10) $<\frac{\partial u}{\partial y_i},\psi>$,i.e. $z_i = \frac{\partial u}{\partial y_i}$, et la Proposition 2.1 est démontrée.

<u>Remarque 2.2</u> : On a évidemment

(2.15) $$\frac{\partial U}{\partial y_i} = {}^t\bar{\omega}\,{}^t\bar{R}\,\frac{\partial u}{\partial y_i}$$

et, d'après (2.7) (Remarque 2.1)

(2.16) $$<\frac{\partial u}{\partial y_i},\phi> = <\frac{\partial U}{\partial y_i},\phi> , \quad \phi \in \mathcal{D}(Y).$$

<u>Remarque 2.3</u> : Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on définit (par itération) $D^\alpha u$ au sens de $\mathcal{D}'_{per}(\bar{Y})$ par

(2.17) $$<D^\alpha u,\psi> = (-1)^{|\alpha|}<u,D^\alpha\psi>$$

et l'on a les relations (2.15)(2.16) entre $D^\alpha u$ et $D^\alpha U$.

3. - L'espace $H^1_{per}(Y)$.

3.1. Notations. Résultat préliminaire.

On note

$L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions localement de carré intégrable dans $\mathbb{R}^n$

$H^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des $U \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tels que $\frac{\partial U}{\partial y_i}$ (au sens de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$) soit dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$,

$$(3.1) \qquad L^2_{loc}(\mathbb{R}^n,Y) = \mathcal{Q}(T^n) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$$

$$(3.2) \qquad H^1_{loc}(\mathbb{R}^n,Y) = \mathcal{Q}(T^n) \cap H^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$$

($\mathcal{Q}(T^n)$ est défini par (2.4), Sect. I).

$L^2_{loc}(\mathbb{R}^n,Y)$ et $H^1_{loc}(\mathbb{R}^n,Y)$ sont des espaces de Hilbert pour les normes respectives

$$(3.3) \qquad \|U\|_{L^2(Y)} = \left(\int_Y |U|^2\, dy\right)^{1/2}, \quad U \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n,Y)$$

$$(3.4) \qquad \|U\|_{H^1(Y)} = \left(\int_Y |U|^2\, dy + \sum_{i=1}^{n} \int_Y \left|\frac{\partial U}{\partial y_i}\right|^2 dy\right)^{1/2}, \quad U \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^n,Y).$$

On va établir le résultat suivant :

Proposition 3.1 : On a l'identité

$$(3.5) \qquad L^2(Y) = {}^tP\,{}^t\theta\,(L^2_{loc}(\mathbb{R}^n,Y)).$$

Démonstration : Posons $L^2_{per}(Y) = {}^tP\,{}^t\theta\,(L^2_{loc}(\mathbb{R}^n,Y)$. On doit montrer que $L^2_{per}(Y) = L^2(Y)$. Montrons d'abord que

$$(i) \qquad L^2_{per}(Y) \subset L^2(Y).$$

Soit $u \in L^2_{per}(Y)$. Alors $u = {}^tP\,{}^t\theta\, U$, où $U \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n\ Y) \subset \mathcal{Q}(T^n)$ (i.e. $u \in \mathcal{D}'_{per}(\bar{Y})$). Pour tout $\psi \in \mathcal{D}_{per}(\bar{Y})$, on a d'après (2.4) $\langle u,\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (\theta U)(P\psi)\, dy$, l'intégration se faisant en réalité sur le support compact K_θ de θU. On en déduit aussitôt que

$$(3.6) \qquad |\langle u,\psi\rangle| \le \|\theta U\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \left(\int_{K_\theta} |P\psi|^2\, dy\right)^{1/2}.$$

Mais alors le compact K_θ est contenu dans une réunion finie de translatées convenables de la période Y. Comme, en outre, $P\psi$ est Y-périodique (on a $P\psi = \psi$ sur toute translatée de Y) on déduit de (3.6) que

$$|\langle u,\psi\rangle| \le C\,\|\psi\|_{L^2(Y)} \quad ; \; C>0 \quad (C \text{ indépendant de } \psi).$$

Cette propriété (valable pour tout $\psi \in \mathcal{D}_{per}(\bar{Y})$) est caractéristique des éléments de $\mathcal{D}'_{per}(\bar{Y})$ qui sont dans $L^2(Y)$ (cf. (2.8)). Donc $u \in L^2(Y)$.

(ii) montrons ensuite que $L^2(Y) \subset L^2_{per}(Y)$.

Soit $u \in L^2(Y)$. D'après (2.8) on a $u = {}^tP\,{}^t\theta\, U$, $U \in \mathcal{Q}(T^n)$. Reste à montrer que $U \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Soit alors $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. Pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ on a (d'après (2.5) et le fait que $u \in L^2(Y)$)

(3.7) $$|\langle U,\phi\rangle| \le \|u\|_{L^2(Y)}\;\|\bar{\omega}\phi\|_{L^2(Y)}.$$

On rappelle que (cf. (2.6) Sect. I) $\bar{\omega}\phi = \sum_{\lambda} \tau_\lambda \phi$ (somme finie) où τ_λ est défini (1.21), Sect. I.

Les remarques suivantes (faciles à vérifier) conduiront au résultat voulu:

a) pour tout $\lambda \in \mathbb{Z}^n$ on a (par un simple changement de variable d'intégration, et du fait que $\operatorname{supp}\phi \subset \mathcal{O}$)

(3.8) $$\|\tau_\lambda \phi\|_{L^2(Y)} \le \|\phi\|_{L^2(\mathcal{O})}.$$

b) $\mathcal{O}$ et $\bar{Y}$ étant des ensembles bornés, le nombre des $\lambda \in \mathbb{Z}^n$ tels que $\operatorname{supp}(\tau_\lambda\phi) \cap \bar{Y} \neq \emptyset$ (ensemble vide) est fini, et majoré par un nombre entier naturel fini $N(\mathcal{O})$, dépendant uniquement de $\mathcal{O}$.

On a alors ($\bar{\omega}\phi$ étant une somme finie) $\|\bar{\omega}\phi\|_{L^2(Y)} \le \sum_{\lambda} \|\tau_\lambda\phi\|_{L^2(Y)}$ d'où (Remarques a), b) précédentes)

(3.9) $$\|\bar{\omega}\phi\|_{L^2(Y)} \le N(\mathcal{O})\,\|\phi\|_{L^2(\mathcal{O})}.$$

Revenant alors à (3.7) et appliquant (3.9) on a

$$|\langle U,\phi\rangle| \le C\,\|\phi\|_{L^2(\mathcal{O})} \quad (C>0) \quad \forall\phi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}),$$

et cela pour $\mathcal{O}$ borné arbitraire ; donc $U \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Ceci achève la démonstration de la Proposition 3.1.

Remarque 3.1 : Réciproquement, on a

$$(3.10) \qquad {}^t\bar{\omega}\ {}^t\bar{R}\ (L^2(Y)) = L^2_{loc}(\mathbb{R}^n,Y). \blacksquare$$

On a la conséquence suivante :

Proposition 3.2 : Restreinte à $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n,Y)$, l'application ${}^tP{}^t\theta$ est identique à l'application $R = |_Y$ (cf. (1.1)).

Preuve : Soit $U \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n,Y)$, et $u = {}^tP{}^t\theta\ U \in L^2(Y)$ (d'après la Proposition 3.1). Utilisant la propriété (2.7) et le fait que $\mathcal{D}(Y)$ est dense dans $L^2(Y)$, on a $u = RU = U|_Y$.

Remarque 3.2 : Restreinte à $L^2(Y)$, l'application ${}^t\bar{\omega}{}^t\bar{R}$ est identique à P = prolongement à $\mathbb{R}^n$ par Y-périodicité.

3.2. L'espace $H^1_{per}(Y)$ en tant que sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'_{per}(\bar{Y})$.

On pose

$$(3.11) \qquad H^1_{per}(Y) = {}^tP{}^t\theta\ (H^1_{loc}(\mathbb{R}^n,Y)).$$

On a évidemment $H^1_{per}(Y) \subset L^2(Y)$. On va donner une caractérisation des éléments de $H^1_{per}(Y)$. On a la

Proposition 3.3 : Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\qquad u \in H^1_{per}(Y)$

(ii) $\qquad u, \dfrac{\partial u}{\partial y_i} \in L^2(Y) \quad (1 \leq i \leq n)$

(où $\dfrac{\partial u}{\partial y_i}$ est la dérivée partielle de u au sens de $\mathcal{D}'_{per}(\bar{Y})$).

Démonstration : Montrons que (i) implique (ii).

Soit $u \in H^1_{per}(Y)$, et $U \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^n,Y)$ tel que $u = {}^tP{}^t\theta\ U$. On a évidemment $u \in L^2(Y) \subset \mathcal{D}'_{per}(\bar{Y})$; $\dfrac{\partial u}{\partial y_i}$ (resp. $\dfrac{\partial U}{\partial y_i}$) étant la dérivée partielle de u (resp. U) au sens de $\mathcal{D}'_{per}(\bar{Y})$ (resp. $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$) on a (cf. (2.12)) $\dfrac{\partial u}{\partial y_i} = {}^tP{}^t\theta\ \dfrac{\partial U}{\partial y_i}$. Appliquant ensuite la Proposition 3.1 (car $\frac{\partial U}{\partial y_i} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n, Y)$) il vient $\frac{\partial u}{\partial y_i} \in L^2(Y)$, d'où le résultat. Le passage de (ii) à (i) suit la même démarche, les formules de base étant cette fois (2.15) (Remarque 2.2) et (3.10) (Remarque 3.1.).

Il est naturel d'introduire dans $H^1_{per}(Y)$ la norme

$$(3.12) \qquad \|u\|_{H^1_{per}(Y)} = \left(\int_Y |u|^2\, dy + \sum_{i=1}^{n} \int_Y \left|\frac{\partial u}{\partial y_i}\right|^2 dy\right)^{1/2}.$$

Muni de la norme (3.12) (qui transfère à $H^1_{per}(Y)$ la structure hilbertienne de $H^1_{loc}(\mathbb{R}^n, Y)$)

$H^1_{per}(Y)$ est un espace de Hilbert.

3.3. <u>L'espace $H^1_{per}(Y)$ en tant que sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'(Y)$</u>.

D'après la Proposition 3.1 on a

$$(3.13) \qquad H^1_{per}(Y) = R\,(H^1_{loc}(\mathbb{R}^n, Y)) = \text{restriction de } H^1_{loc}(\mathbb{R}^n, Y) \text{ à } Y.$$

Sous cette forme ((3.13)) on voit que $H^1_{per}(Y)$ n'est autre que le sous-espace fermé de $H^1(Y)$ constitué des fonctions u telles que "u Y-périodique", i.e. telles que les traces de u soient égales sur les faces opposées de Y (cf. Bensoussan-Lions-Papanicolaou [1]). On a aussitôt la

<u>Proposition 3.4</u> : Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\quad u \in H^1_{per}(Y)$

(ii) $\quad u \in H^1(Y)$, et les traces de u sont égales sur les faces opposées de Y.

En outre on a l'égalité (cf. (3.12))

$$(3.14) \qquad \|u\|_{H^1_{per}(Y)} = \|u\|_{H^1(Y)}, \quad u \in H^1_{per}(Y).$$

<u>Preuve</u> : Nous renvoyons à Bensoussan-Lions-Papanicolaou [1] pour l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Montrons qu'on a l'égalité (3.14). Il suffit de montrer que

(3.15) pour $u \in H^1_{per}(Y)$, la dérivée $\frac{\partial u}{\partial y_i}$ au sens de $\mathcal{D}'_{per}(Y)$ coïncide avec celle au sens de $\mathcal{D}'(Y)$.

Soit $u \in H^1_{per}(Y)$, et soit $U \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^n, Y)$ tel que $u = {}^t P^t{}_\theta U$. D'après (3.13) on a $u = U|_Y$, $\frac{\partial u}{\partial y_i} = \frac{\partial U}{\partial y_i}\Big|_Y \in L^2(Y)$, la dérivée étant partout comprise au sens de $\mathcal{D}'$. Mais on a encore $\frac{\partial u}{\partial y_i} = \frac{\partial U}{\partial y_i}\Big|_Y$ où $\frac{\partial u}{\partial y_i}$ est prise au sens de $\mathcal{D}'_{per}(\bar{Y})$ (d'après la Proposition 3.1) d'où (3.15).

On posera

(3.16) $$H^1_{per}(Y) = \{u \in H^1(Y) \; ; \; u \ \text{Y-périodique}\} . \; \blacksquare$$

3.4. Un théorème de densité.

On a d'abord le résultat suivant :

Pour K, compact de $\mathbb{R}^n$, définissons

$$L^2_K(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) \; ; \; u \text{ à support (compact) dans } K\}$$

(3.17) $$H^1_K(\mathbb{R}^n) = L^2_K(\mathbb{R}^n) \cap H^1(\mathbb{R}^n).$$

$L^2_K(\mathbb{R}^n)$ (resp. $H^1_K(\mathbb{R}^n)$) est un espace de Hilbert pour la norme de $L^2(\mathbb{R}^n)$ (resp. $H^1(\mathbb{R}^n)$).

On a alors le

Lemme 3.1 : L'opérateur $\bar{\omega}$ (cf. (2.9)(2.10), Sect. I) est continu de $H^1_K(\mathbb{R}^n) \to H^1_{loc}(\mathbb{R}^n, Y)$.

Démonstration : En suivant exactement la démarche qui a conduit à la majoration (3.9), on a

$$\|\bar{\omega} u\|_{L^2(Y)} \leq N(K) \, \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall u \in L^2_K(\mathbb{R}^n)$$

où $N(K) > 0$ ne dépend que du compact K.

Le Lemme 3.1 s'en déduit aisément grâce à la propriété (voir (2.14))

(3.18) $$\bar{\omega}\left(\frac{\partial w}{\partial y_i}\right) = \frac{\partial}{\partial y_i}(\bar{\omega} w), \quad w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n). \; \blacksquare$$

Démontrons maintenant le

Théorème 3.1 : $\mathcal{D}_{per}(\bar{Y})$ est dense dans $H^1_{per}(Y)$.

Preuve : Comme $\mathcal{D}_{per}(\bar{Y}) = \mathcal{P}(T^n)|_{\bar{Y}}$, $H^1_{per}(Y) = H^1_{loc}(\mathbb{R}^n, Y)|_Y$, il revient au même de montrer que ($\mathcal{P}(T^n)$ étant défini en (2.3) de la Sect. I)

(3.19) $\quad \mathcal{P}(T^n)$ est dense dans $H^1_{loc}(\mathbb{R}^n, Y)$.

Soit alors θ une $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-partition périodique de l'unité (cf. (2.11), Sect. I) et soit $r > 0$ un nombre donné, indépendamment de θ, $\bar{B}(\mathcal{O}, r)$ la boule fermée centrée à l'origine et de rayon r. Soit enfin $\alpha_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ une suite régularisante telle que supp $\alpha_j \subset \bar{B}(\mathcal{O}, r)$ $\forall j$. Pour $U \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^n, Y)$, posons $w = \theta U$.

On a $w \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\bar{\omega} w = U$ (cette dernière relation s'obtient grâce à l'égalité $\bar{\omega}(\theta U) = (\bar{\omega}\theta)U$ démontrée dans Vo-Khac Khoan [2], p. 62, et grâce à la propriété $\bar{\omega}\theta = 1$).

Définissons maintenant le produit de convolution

(3.20) $\quad \phi_j = w * \alpha_j$.

On a $\phi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, supp $\phi_j \subset K' = \{y \in \mathbb{R}^n \ ; \ d(y, \text{supp } w) \leq r\}$ (voir L. Schwartz [1], Vo-Khac Khoan [1] pour détails sur la régularisation), de sorte que supp $\phi_j \subset K'$, supp $w \subset K'$; donc

$$w, \phi_j \in H^1_K(\mathbb{R}^n) \quad \forall j \quad \text{(cf. (3.17)), avec } K = \{y \in \mathbb{R}^n ; \ d(y, \text{supp } \theta) \leq r\} .$$

Mais alors on a

$$\phi_j \to w \text{ dans } H^1(\mathbb{R}^n) \text{ lorsque } j \to \infty$$

(cette propriété est classique), d'où en utilisant le Lemma 3.1,

$$\psi_j \to U \text{ dans } H^1_{loc}(\mathbb{R}^n, Y) \text{ lorsque } j \to \infty$$

où

(3.21) $\quad \psi_j = \bar{\omega}\phi_j \ , \ \psi_j \in \mathcal{P}(T^n)$.

Ceci démontre (3.19), et par suite le Théorème 3.1. ∎

Remarque 3.3 : Le Théorème 3.1 implique que $\mathcal{D}_{per}(\bar{Y})$ est dense dans $L^2(Y)$. On retrouve ainsi le résultat (1.10). On a aussi

(3.22) $\qquad H^1_{per}(Y)$ est dense dans $L^2(Y)$, avec injection continue.

Remarque 3.4 : La suite ψ_j ((3.21)) s'exprime plus explicitement par

(3.23) $$\psi_j = w * \bar{\omega}\, \alpha_j .$$

On a aussi

(3.24) $$\psi_j = U * \alpha_j .$$

Justifions (3.23) : la fonction $\bar{\omega}\phi_j$ est une somme finie de translatée (cf. (2.6), Sect. I) de ϕ_j ((3.20)) ; or $\tau_\lambda \phi_j = w * \tau_\lambda \alpha_j$. Ceci établit la formule (3.23). La formule (3.24) se démontre de manière analogue en raisonnant sur w (distribution à support compact).

4. - L'ESPACE $H^{-1}_{per}(Y)$.

On pose

(4.1) $$H^{-1}_{per}(Y) = (H^1_{per}(Y))' = \text{dual de } H^1_{per}(Y).$$

On munira $H^{-1}_{per}(Y)$ de la norme habituelle du dual, ce qui en fait un espace de Hilbert. Notons que (d'après le Théorème 3.1, et grâce à la continuité de l'injection $\mathcal{D}_{per}(\bar{Y}) \subset H^1_{per}(Y)$) :

(4.2) $$H^{-1}_{per}(Y) \subset \mathcal{D}'_{per}(\bar{Y}),$$

(4.3) $\qquad \mathcal{D}_{per}(\bar{Y})$ est dense dans $H^{-1}_{per}(Y)$,

(4.4) $\qquad$ une distribution $u \in \mathcal{D}'_{per}(\bar{Y})$ est dans $H^{-1}_{per}(Y)$ si, et seulement si elle est de la forme (non unique)
$$u = u_o + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial y_i}, \quad u_i \in L^2(Y).$$

Toutes ces propriétés peuvent se démontrer en suivant la démarche qui conduit à des résultats analogues (bien connus) pour $\mathcal{D}(Y)$ et $H^{-1}(Y)$ (voir par exemple Vo-Khac Khoan [2], pp. 171-178). ∎

5. - LES TRACES SUR γ_o.

5.1. Notations et remarques préliminaires.

On rappelle que l'ensemble γ_o désigne la frontière définie Sect. I, §1, et vérifiant les conditions (1.18)(1.19). On définit

$L^2(\gamma_o)$ = ensemble des (classes de) fonctions définies (presque partout) sur γ_o, et intégrables par rapport à la mesure de surface ds.

Soit $\mathcal{O}_o$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ vérifiant les conditions (1.28)-(1.30) de la Sect. I. Pour $u \in H^1_{per}(Y)$, soit $U \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^n, Y)$ tel que (cf. §3) $U|_Y = u$. Alors on a $U|_{\mathcal{O}_o} \in H^1(\mathcal{O}_o)$. Grâce à la régularité de $\mathcal{O}_o$, on peut définir de la manière habituelle (Lions-Magenes [1]) la trace de $U|_{\mathcal{O}_o}$ sur le bord $\partial\mathcal{O}_o$ (c'est un élément de $L^2(\partial\mathcal{O}_o)$). Comme $\gamma_o \subset \partial\mathcal{O}_o$ (cf. (1.30)$_1^o$ Sect. I), on peut donc définir $U|_{\gamma_o}$ (la trace de U sur γ_o), qui est un élément de $L^2(\gamma_o)$. Par conséquent on sait définir $u|_{\gamma_o}$ (la trace de u sur γ_o), i.e. $u|_{\gamma_o} = U|_{\gamma_o}$.

En outre l'application linéaire

$$u \to u|_{\gamma_o} \tag{5.1}$$

est continue de $H^1_{per}(Y) \to L^2(\gamma_o)$ car elle est composée des applications linéaires continues $u \to U$, $U \to U|_{\gamma_o}$. ∎

5.2. L'espace $H^{1/2}_{per}(\gamma_o)$.

On définit

$$H^{1/2}_{per}(\gamma_o) = \{\Phi \in L^2(\gamma_o) \ ; \ \Phi = u|_{\gamma_o} \ , \ u \in H^1_{per}(Y)\} \ . \tag{5.2}$$

$$\mathcal{N}_o = \{u \in H^1_{per}(Y) \ ; \ u|_{\gamma_o} = 0\}$$

(qui est un sous-espace fermé de $H^1_{per}(Y)$, car (5.1) est continue)

$\mathcal{N}_o^\perp$ = orthogonal de $\mathcal{N}_o$ dans $H^1_{per}(Y)$.

$\overset{\circ}{H}{}^1_{per} = H^1_{per}(Y)|_{\mathcal{N}_o}$ (espace quotient).

L'espace $\overset{\circ}{H}{}^1_{per}$ étant algébriquement isomorphe à $H^{1/2}_{per}(\gamma_o)$, il est naturel de munir ce dernier de la norme quotient

(5.3) $$\|\Phi\|_{H^{1/2}_{per}(\gamma_o)} = \inf_{\substack{u \in H^1_{per}(Y) \\ u|_{\gamma_o} = \Phi}} \|u\|_{H^1_{per}(Y)}$$

qui en fait un espace de Hilbert.

On a la

Proposition 5.1 : L'application trace

(5.4) $$u \to u|_{\gamma_o}$$

est linéaire continue de $H^1_{per}(Y) \to H^{1/2}_{per}(\gamma_o)$ et il existe un relèvement linéaire continu

(5.5) $$\ell_Y : H^{1/2}_{per}(\gamma_o) \to H^1_{per}(Y).$$

Démonstration : La continuité de l'application (5.4) découle tout naturellement de la définition ((5.3)) de la norme de $H^{1/2}_{per}(\gamma_o)$. L'existence de ℓ_Y ((5.5)) résulte de la remarque suivante :

L'espace $H^{1/2}_{per}(\gamma_o)$ est isomorphe à $\overset{\circ}{H}{}^1_{per}$ (algébriquement et topologiquement), l'espace $\overset{\circ}{H}{}^1_{per}$ est isomorphe à $\mathcal{N}_o^{\perp}$ (algébriquement et topologiquement ; c'est un résultat connu d'Analyse Générale).

L'existence de ℓ_Y en découle. Notons que si $\Phi \in H^{1/2}_{per}(\gamma_o)$, et si l'on pose $u_\Phi = \ell_Y(\Phi)$. Alors u_Φ est l'unique fonction vérifiant :

(5.6) $$u_\Phi \in \mathcal{N}_o^{\perp}$$

(5.7) $$u_\Phi|_{\gamma_o} = \Phi,$$

et on a

(5.8) $$\|u_\Phi\|_{H^1_{per}(Y)} = \|\Phi\|_{H^{1/2}_{per}(\gamma_o)} . \blacksquare$$

III - DISTRIBUTIONS PERIODIQUES DEFINIES SUR UN OUVERT INVARIANT PAR PERIODICITE. CARACTERISATION SUR LA PERIODE DE BASE.

1. Orientation

L'ensemble Y désigne toujours le parallélépipède défini (1.2), Sect. I. On considère un ouvert $Y_o \subset Y$ (cf. (1.7), Sect. I ; voir aussi tout le § 1 de la Sect. I pour les notations) vérifiant des conditions (1.15)-(1.19) de la Sect. I. On note Ω_o (cf. (1.14)-(1.22), Sect. I) l'ouvert de $\mathbb{R}^n$ engendré par Y-périodicité par Y_o.

Notre objet dans cette Sect. III est de caractériser sur Y_o les distributions définies sur l'ouvert Ω_o, périodiques et de période Y. Nous montrerons d'abord que les notions (§ 1, Sect. I) qui ont servi de base à l'étude faite à la Sect. II s'étendent à des espaces convenables sur Ω_o. Nous reprendrons ensuite la démarche suivie (§§ 1 et 2, Sect. II) précédemment pour la construction de $\mathcal{D}'_{per}(\bar{Y})$, et nous obtiendrons un espace $\mathcal{D}'_{per}(Y_o)$ auquel s'identifient les distributions Y-périodiques sur Ω_o. Nous définirons enfin l'espace $H^1_{per}(Y_o)$ (l'analogue de $H^1_{per}(Y)$) et ses sous-espaces remarquables, et nous en dégagerons quelques propriétés utiles pour les applications que nous avons en vue.

2. Notations

L'ouvert Y_o est celui introduit précédemment, auquel est associé Ω_o (l'ouvert engendré par Y_o par Y-périodicité). On rappelle que Ω_o est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$, invariant par Y-périodicité (cf. (1.23)-(1.24), Sect. I), et que son bord (cf. (1.26)-(1.27), voir aussi (1.19), Sect. I)

(2.1) $\quad \gamma$ est une hypersurface suffisamment régulière.

On introduit les espaces habituels

$\mathcal{D}(\Omega_o)$ des fonctions définies, de classe C^∞ sur Ω_o et à support compact dans Ω_o,

$\mathcal{D}'(\Omega_o)$ (= dual de $\mathcal{D}(\Omega_o)$) des distributions sur Ω_o,

(2.2) $\quad \mathcal{E}(\Omega_o)$ des fonctions définies et de classe C^∞ sur Ω_o.

On rappelle que la topologie de $\mathcal{E}(\Omega_o)$ (espace de Fréchet) est définie à l'aide de la famille de semi-normes

(2.3) $$p_{K,m}(\Psi) = \sup_{\substack{y\in K \\ |\alpha|\leq m}} |D^\alpha \Psi(y)|$$

où K parcourt l'ensemble des compacts de Ω_o et où m décrit l'ensemble $\mathbb{N}$. On rappelle aussi que $\mathcal{D}(\Omega_o)$ est un L.F. (i.e. un espace limite inductive stricte d'espaces de Fréchet ; voir L. Schwartz [1], Vo-Khac Khoan [1]) et que

(2.4) $\mathcal{D}(\Omega_o)$ est dense dans $\mathcal{E}(\Omega_o)$, avec injection continue.

Enfin on note

(2.5) $\mathcal{D}(\bar{\Omega}_o)$ = ensemble des restrictions à Ω_o des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

(2.6) $\mathcal{Q}(\Omega_o)$ = espace des distributions $U \in \mathcal{D}'(\Omega_o)$, U Y-périodique.

On vérifie (exactement comme dans Vo-Khac Khoan [2], p. 61) que

(2.7) $\mathcal{Q}(\Omega_o)$ est fermé dans $\mathcal{D}'(\Omega_o)$.

3. L'espace $\mathcal{F}(\Omega_o)$

3.1. Introduction

Dans ce paragraphe, la régularité de Ω_o (i.e. la régularité de son bord γ) et l'invariance de Ω_o par Y-périodicité ne jouent aucun rôle. Par conséquent les définitions et résultats de ce § 3 (et par suite, du § 4 privé du n° 4.3) sont valables pour un ouvert quelconque distinct de $\mathbb{R}^n$.

Si alors Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, notons $\partial\Omega$ son bord et considérons la fonction

(3.1) $y \to d(y,\partial\Omega)$ $(d(y,\partial\Omega)$ = distance de y à $\partial\Omega)$

continue de Ω dans $\mathbb{R}_+^*$ (demi-axe réel positif privé de 0). L'image de Ω par l'application (3.1) est un intervalle I_Ω de $\mathbb{R}_+$, borné à gauche par 0, et à droite par un nombre fini ou infini que nous désignerons par ε_o (si par exemple Ω est borné, ε_o est fini et on peut tout aussi bien avoir $\varepsilon_o \in I_\Omega$ que $\varepsilon_o \notin I_\Omega$. Si Ω est le complémentaire dans $\mathbb{R}^n$ d'un compact, on a $\varepsilon_o = +\infty$). Dans tous les cas, ε_o est la borne supérieure du plus grand ouvert $]0,\varepsilon_o[$ tel que

(3.2) $\quad]0,\varepsilon_o[\, \subset I_\Omega$.

Remarque 3.1 : Dans le cas de l'ouvert Ω_o, le nombre ε_o est fini. En effet tout point $y \in \Omega_o$ est de la forme (cf. (1.22), I) $y = y_o + a_\lambda$, où $y_o \in \overset{\circ}{Y}_o$, $a_\lambda \in \prod_{i=1}^{n} a_i\mathbb{Z}$ (cf. (1.20), I) ; de sorte que

(3.3) $\quad d(y,\gamma) = d(y_o,\gamma) \quad (\gamma = \partial\Omega_o = \text{bord de } \Omega_o)$

or (3.1) est continue et $\overset{\circ}{Y}_o \subset \overline{Y}_o$ (compact). ∎

On définit l'ensemble

(3.4) $\quad \mathcal{F}(\Omega_o) = \{\psi \in \mathcal{E}(\Omega_o) \text{ ; il existe } \varepsilon > 0 \text{ tel que } \psi(y) = 0 \quad \forall y,\ d(y,\gamma) < \varepsilon\}$

où $\mathcal{E}(\Omega_o)$ est défini en (2.2), $\gamma = \partial\Omega_o$, et où ε dépend évidemment de ψ. On vérifie sans difficulté que $\mathcal{F}(\Omega_o)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}(\Omega_o)$, et que $\mathcal{F}(\Omega_o)$ n'est pas fermé dans $\mathcal{E}(\Omega_o)$. Par ailleurs notons déjà que $\mathcal{D}(\Omega_o) \subset \mathcal{F}(\Omega_o)$. Nous allons structurer $\mathcal{F}(\Omega_o)$ en un espace vectoriel topologique localement convexe. De manière précise, nous allons montrer que

(3.5) $\quad \mathcal{F}(\Omega_o)$ est un espace L.F.

i.e. limite inductive stricte d'espaces de Fréchet (cf. L. Schwartz [1], Vo-Khac Khoan [1]).

3.2. L'espace vectoriel topologique $\mathcal{F}(\Omega_o)$.

Les nombres $\varepsilon > 0$ qui interviennent dans la suite de ce §3 vérifient $0 < \varepsilon < \varepsilon_o$, où ε_o est le plus grand nombre réel (cf. Remarque 3.1) vérifiant la condition (3.2) (où l'on a posé, ainsi que dans (3.1), $\Omega = \Omega_o$). Pour simplifier, nous supposerons que $\varepsilon_o = 1$ (cela ne restreint en rien la généralité), et nous noterons simplement "$\varepsilon > 0$", sous-entendu "$0 < \varepsilon < 1$" (nous verrons dans la suite qu'on peut même prendre $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$)

Pour $\varepsilon > 0$, définissons

(3.6) $\qquad \Omega_\varepsilon = \{y \in \Omega_o \ ; \ d(y,\gamma) > \varepsilon\}$

(3.7) $\qquad F_\varepsilon = \bar{\Omega}_\varepsilon = \{y \in \Omega_o \ ; \ d(y,\gamma) \geq \varepsilon\}$ (adhérence de Ω_ε dans $\mathbb{R}^n$)

L'ensemble Ω_ε (resp. F_ε) est un ouvert (resp. fermé), car l'application (3.1) est continue (resp. F_ε est l'adhérence de Ω_ε).

Puis posons

(3.8) $\qquad \mathfrak{F}_{F_\varepsilon}(\Omega_o) = \{\psi \in \mathcal{E}(\Omega_o) \ ; \ \text{supp}\ \psi \subset F_\varepsilon\}$

où supp ψ désigne le support de ψ (dans Ω_o).

On vérifie facilement que $\mathfrak{F}_{F_\varepsilon}(\Omega_o)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{E}(\Omega_o)$. On le munira de la topologie induite par $\mathcal{E}(\Omega_o)$, ce qui en fait un espace de Fréchet.

On remarque en outre que

(3.9) $\qquad \mathfrak{F}(\Omega_o) = \bigcup_\varepsilon \mathfrak{F}_{F_\varepsilon}(\Omega_o)$. ■

Maintenant, pour $j \in \mathbb{N}^*$, posons

(3.10) $\qquad \Omega_j = \{y \in \Omega_o \ ; \ d(y,\gamma) > \frac{1}{j+1}\}$.

(3.11) $\qquad F_j = \bar{\Omega}_j$

(3.12) $\qquad \mathfrak{F}_{F_j}(\Omega_o) = \{\psi \in \mathcal{E}(\Omega_o) \ ; \ \text{supp}\ \psi \subset F_j\}$.

La suite d'ouverts Ω_j vérifie

(3.13) $\qquad \Omega_j \subset \Omega_{j+1}$, $\bar{\Omega}_j \subset \Omega_{j+1}$

(3.14) $\qquad \Omega_o = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j$.

On a le

<u>Lemme 3.1</u> : La suite d'espaces de Fréchet $\mathfrak{F}_{F_j}(\Omega_o)$ vérifie

(i) $\mathcal{F}_{F_j}(\Omega_o) \subset \mathcal{F}_{F_{j+1}}(\Omega_o)$

(ii) la topologie de $\mathcal{F}_{F_j}(\Omega_o)$ est identique à celle induite par $\mathcal{F}_{F_{j+1}}(\Omega_o)$

(iii) $\mathcal{F}(\Omega_o) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{F}_{F_j}(\Omega_o)$.

Démonstration : Les conditions (i) et (ii) sont évidentes. La condition (iii) résulte de ce que tout fermé F_ε de la forme (3.7) est contenu dans un certain F_{j_ε} ((3.11)) (en effet, à tout $\varepsilon > 0$ peut être associé un $j_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon(j_\varepsilon+1) \geq 1$), et de (3.9).

Grâce au Lemme 3.1. on peut munir $\mathcal{F}(\Omega_o)$ de la topologie limite inductive stricte des topologies des $\mathcal{F}_{F_j}(\Omega_o)$ (i.e. la topologie localement convexe la plus fine rendant continues les injections $\mathcal{F}_{F_j}(\Omega_o) \to \mathcal{F}(\Omega_o)$). Cette topologie est la topologie naturelle de $\mathcal{F}(\Omega_o)$, et $\mathcal{F}(\Omega_o)$ est alors un espace LF. ∎

Remarque 3.2 : Pour $j \in \mathbb{N}^*$, définissons

(3.15) $\quad \overset{-\circ-}{Y}_{o_j} = \{y \in \overset{-\circ-}{Y}_o \;;\; d(y,\gamma) > \frac{1}{j+1}\}$

(3.16) $\quad \bar{Y}_{oj} = (\text{adhérence de } \overset{-\circ-}{Y}_{oj})\ \{y \in \overset{-\circ-}{Y}_o \;;\; d(y,\gamma) \geq \frac{1}{j+1}\}$

$\overset{-\circ-}{Y}_o$ est défini en (1.14), Sect. I).

En tenant compte de la Y-périodicité de Ω_o, on voit que l'ouvert (resp. le fermé) Ω_j ((3.10)) (resp. F_j ((3.11))) n'est autre chose que l'ensemble engendré par $\overset{-\circ-}{Y}_{oj}$ (resp. $\bar{Y}_{oj}$) par Y-périodicité, i.e.

(3.17) $\quad \Omega_j = \bigcup_\lambda (\overset{-\circ-}{Y}_{oj}+a_\lambda)\ ,\ F_j = \bigcup_\lambda (\bar{Y}_{oj}+a_\lambda)$.

Remarque 3.3 : Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,

(3.18) $\quad$ la topologie de $\mathcal{F}_{F_j}(\Omega_o)$ est identique à celle induite par $\mathcal{F}(\Omega_o)$.

Cette propriété est caractéristique de la topologie limite inductive stricte. La propriété (3.18) implique que, pour tout $\varepsilon > 0$

(3.19) $\quad$ la topologie de $\mathcal{F}_{F_\varepsilon}(\Omega_o)$ est identique à celle induite par $\mathcal{F}(\Omega_o)$.

3.3. Caractérisation des suites convergentes et des applications continues.

On a la

Proposition 3.1 : Soit ψ_m une suite d'éléments de $\mathfrak{F}(\Omega_o)$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) ψ_m converge vers ψ dans $\mathfrak{F}(\Omega_o)$

(ii) il existe $\varepsilon > 0$ tel qu'on ait :

- $\psi, \psi_m \in \mathfrak{F}_{F_\varepsilon}(\Omega_o)$

- ψ_m converge vers ψ dans $\mathfrak{F}_{F_\varepsilon}(\Omega_o)$

($\mathfrak{F}_{F_\varepsilon}(\Omega_o)$ étant défini en (3.8)).

Preuve : La Proposition 3.1 découle de la définition de la topologie de $\mathfrak{F}(\Omega_o)$ (cf. Lemme 3.1), et du fait que chaque $\mathfrak{F}_{F_\varepsilon}(\Omega_o)$ est contenu dans un certain $\mathfrak{F}_{F_j}(\Omega_o)$ (la Proposition 3.1 n'est qu'un cas particulier de la caractérisation d'une suite convergente dans un LF.). ∎

On a aussi le résultat suivant :

Proposition 3.2 : Soit F un espace localement convexe, f une application linéaire de $\mathfrak{F}(\Omega_o)$ dans F. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est continue de $\mathfrak{F}(\Omega_o)$ dans F

(ii) pour tout $\varepsilon > 0$, la restriction de f à $\mathfrak{F}_{F_\varepsilon}(\Omega_o)$ est continue.

Preuve : Voir par exemple Vo-Khac Khoan [1] (p. 58) pour une démonstration plus générale. ∎

Comme conséquence de la Proposition 3.2 on a la

Proposition 3.3 : La topologie de $\mathfrak{F}(\Omega_o)$ ne dépend pas de la suite d'ensembles de définition Ω_j (ou F_j).

Preuve : Elle est identique à celle du résultat analogue pour $\mathcal{D}(\Omega_o)$ (cf. Vo-Khac-Khoan [1], p. 138).

3.4. Un résultat de densité.

On va démontrer la

Proposition 3.4 : $\mathcal{D}(\Omega_o)$ est dense dans $\mathcal{F}(\Omega_o)$.

Preuve : Soit $\phi_i \in \mathcal{D}(\Omega_o)$ une suite tronquante sur Ω_o (cf. Vo-Khac Khoan [1]), et soit $\psi \in \mathcal{F}(\Omega_o)$. Alors $\psi \in \mathcal{F}_{F_{j_o}}(\Omega_o)$ ((3.12)) pour un certain $j_o \in \mathbb{N}^*$. On pose $\psi_i = \phi_i\psi$. On a évidemment $\psi_i \in \mathcal{D}(\Omega_o)$. En outre la relation supp $(\phi_i\psi) \subset$ Supp ϕ_i $\cap$ supp ψ montre que supp $\psi_i \subset F_{j_o}$, donc $\psi_i \in \mathcal{F}_{F_{j_o}}(\Omega_o)$. Mais (cf. Vo-Khac Khoan [1], p. 150) $\psi_i \to \psi$ dans $\mathcal{E}(\Omega_o)$, donc ($\mathcal{F}_{F_{j_o}}(\Omega_o)$ étant fermé dans $\mathcal{E}(\Omega_o)$) $\psi_i \to \psi$ dans $\mathcal{F}_{F_{j_o}}(\Omega_o)$; c'est-à-dire, d'après la Proposition 3.1, que ψ_i converge vers ψ dans $\mathcal{F}(\Omega_o)$.

Etablissons maintenant le résultat complémentaire suivant :

Proposition 3.5 : L'injection

$$\mathcal{D}(\Omega_o) \to \mathcal{F}(\Omega_o) \tag{3.20}$$

est continue.

Preuve : On doit montrer que la restriction de (3.20) à tout $\mathcal{D}_K(\Omega_o)$ est continue ($\mathcal{D}_K(\Omega_o)$ = sous-espace fermé de $\mathcal{E}(\Omega_o)$ constitué des fonctions à support dans K ; K compact de Ω_o). Si alors K est un compact de Ω_o, on a $K \subset F_{j_o}$ (3.11)) pour un certain $j_o \in \mathbb{N}^*$ (vérification facile), de sorte que $\mathcal{D}_K(\Omega_o) \subset \mathcal{F}_{F_{j_o}}(\Omega_o)$; or l'injection $\mathcal{D}_K(\Omega_o) \to \mathcal{F}_{F_{j_o}}$ est continue (d'après la deuxième propriété (2.4) ; notons aussi que les topologies de $\mathcal{D}_K(\Omega_o)$ et $\mathcal{F}_{F_{j_o}}(\Omega_o)$ sont toutes deux induites par $\mathcal{E}(\Omega_o)$) et la topologie de $\mathcal{F}_{F_{j_o}}(\Omega_o)$ est identique à celle induite par $\mathcal{F}(\Omega_o)$ (Remarque 3.3), donc (3.20) est continue de $\mathcal{D}_K(\Omega_o) \to \mathcal{F}(\Omega_o)$, d'où le résultat. ∎

4. - L'ESPACE $\mathcal{F}'(\Omega_o)$.

On désigne par $\mathcal{F}'(\Omega_o)$ le dual (topologique) de $\mathcal{F}(\Omega_o)$. Grâce à la Proposition 3.4 et à la Proposition 3.5 on a (cf. Théorème général d'injection des duals dans Vo-Khac Khoan [1])

$$\mathcal{F}'(\Omega_o) \subset \mathcal{D}'(\Omega_o) \tag{4.1}$$

c'est-à-dire que $\mathcal{F}'(\Omega_o)$ s'identifie à un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'(\Omega_o)$. Notons par ailleurs que $\mathcal{F}(\Omega_o)$ est dense dans $\mathcal{E}(\Omega_o)$ (cela découle de la première propriété (2.4)) et que, naturellement, l'injection $\mathcal{F}(\Omega_o) \to \mathcal{E}(\Omega_o)$ est continue. Par conséquent on a

(4.2) $\qquad \mathcal{E}'(\Omega_o) \subset \mathcal{F}'(\Omega_o)$

i.e. $\mathcal{F}'(\Omega_o)$ contient les distributions à support compact. ∎

Pour $T \in \mathcal{F}'(\Omega_o)$, et $\psi \in \mathcal{F}(\Omega_o)$, nous noterons $<T,\psi>$ la valeur de T au point ψ. On munira $\mathcal{F}'(\Omega_o)$ de la topologie faible du dual.

4.1. Caractérisation des formes linéaires continues sur $\mathcal{F}(\Omega_o)$.

On a la

Proposition 4.1 : Soit T une forme linéaire sur $\mathcal{F}(\Omega_o)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $T \in \mathcal{F}'(\Omega_o)$ (i.e. T est continue sur $\mathcal{F}(\Omega_o)$)

(ii) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K_\varepsilon \subset \Omega_o$, un entier $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ et une constante $C_\varepsilon > 0$ tels qu'on ait

(4.3) $\qquad |<T,\psi>| \leq C_\varepsilon p_{K_\varepsilon, m_\varepsilon}(\psi), \quad \forall \psi \in \mathcal{F}(\Omega_o)$, supp $\psi \subset F_\varepsilon$

(l'ensemble F_ε étant donné par (3.7)).

Preuve : Ce résultat se déduit de la Proposition 3.2 en posant $\mathbb{C} = F$, et en exprimant la condition (ii) à l'aide des semi-normes (2.3).

Remarque 4.1 : Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega_o)$ est (prolongeable en) un élément de $\mathcal{F}'(\Omega_o)$ si, et seulement si est satisfaite la condition suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K_\varepsilon \subset \Omega_o$, $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ et $C_\varepsilon > 0$ tels que

(4.4) $\qquad |<T,\phi>| \leq C_\varepsilon p_{K_\varepsilon, m_\varepsilon}(\phi), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega_o)$, supp $\phi \subset F_\varepsilon$.

i.e. T est continue sur $\mathcal{D}(\Omega_o)$ muni de la topologie de $\mathcal{F}(\Omega_o)$. ∎

4.2. Distribution localement à support borné.

Définition : Nous dirons qu'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega_o)$ est localement à support borné si sa restriction à tout ouvert Ω_ε ((3.6)) est une distribution à support borné.

Nous allons montrer qu'une distribution localement à support borné est identifiable à un élément de $\mathcal{F}'(\Omega_o)$.

Etablissons d'abord les lemmes suivants :

Lemme 4.1 : Pour tout $\chi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}_o)$ (cf. (2.5)) l'application linéaire

(4.5) $\qquad \psi \to \chi\psi$

est continue de $\mathcal{F}(\Omega_o)$ dans $\mathcal{D}(\Omega_o)$.

Démonstration : Soit $\chi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}_o)$. Par définition, $\chi = \tilde{\chi}|_{\Omega_o}$, où $\tilde{\chi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. On doit montrer que la restriction de (4.5) à tout $\mathcal{F}_{F_\varepsilon}(\Omega_o)$ est continue (cf. Proposition 3.2). Soit alors $\varepsilon > 0$, et $\psi \in \mathcal{F}_{F_\varepsilon}(\Omega_o)$. On pose $K_\varepsilon = F_\varepsilon \cap \operatorname{supp} \tilde{\chi}$; K_ε est un compact de Ω_o, et on a $\chi\psi \in \mathcal{D}_{K_\varepsilon}(\Omega_o)$. Mais alors l'application (4.5) est continue de $\mathcal{F}_{F_\varepsilon}(\Omega_o)$ dans $\mathcal{D}_{K_\varepsilon}(\Omega_o)$ (car elle est continue sur $\mathcal{E}(\Omega_o)$ cf. Vo-Khac Khoan [1], p. 139). Par conséquent elle est continue de $\mathcal{F}_{F_\varepsilon}(\Omega_o)$ dans $\mathcal{D}(\Omega_o)$ (en effet la topologie de $\mathcal{D}_{K_\varepsilon}(\Omega_o)$ est identique à celle induite par $\mathcal{D}(\Omega_o)$), ce qui achève la démonstration. ∎

Lemma 4.2 : Soit Ω_j la suite (3.10). Alors on a l'identité

(4.6) $$\Omega_j = \{y \in \Omega_{j+1} \ ; \ d(y,\partial\Omega_{j+1}) > \frac{1}{(j+1)(j+2)}\} .$$

Preuve : En remarquant que le bord $\partial\Omega_{j+1}$ de Ω_{j+1} a pour équation $d(y,\gamma) = \frac{1}{j+2}$, on démontre sans difficulté que

$$d(y,\gamma) = d(y,\partial\Omega_{j+1}) + \frac{1}{j+2} .$$

L'identité (4.6) s'en déduit alors aisément. ∎

Remarque 4.2 : Pour tout Ω_j ((3.10) (et plus généralement, pour tout Ω_ε de la forme (3.6)) on peut définir l'espace $\mathcal{F}(\Omega_j)$ comme en (3.4) et, d'après l'étude précédente, le structurer en un espace LF. Il est alors clair que les résultats précédents pour $\mathcal{F}(\Omega_o)$ et $\mathcal{F}'(\Omega_o)$ restent valables lorsque Ω_o est remplace par Ω_j.

On va maintenant établir le théorème suivant :

Théorème 4.1 : Soit T une distrubution sur Ω_o. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) la distribution T est localement à support borné.

(ii) la distribution T est (prolongeable en) un élément de $\mathcal{F}'(\Omega_o)$.

Démonstration : - Montrons d'abord que (i) entraîne (ii).

Soit T vérifiant la condition (i). Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, notons T_j la restriction de T à l'ouvert Ω_j ((3.10)), supp T_j son support. Montrons que

a) T_j est prolongeable en un élément de $\mathcal{F}'(\Omega_j)$. Soit (par hypothèse) K_j un compact (que l'on peut toujours supposer) dans $\bar{\Omega}_j$ tel que supp $T_j \subset K_j$. Alors on a

(4.7) $\qquad$ supp $T_j \subset K_j \cap \Omega_j$ (ensemble borné dans $\mathbb{R}^n$)

Soit (d'après le Lemme de séparation du type d'Urysohn ; cf. Vo-Khac Khoan [1]) $\tilde{\chi}_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \tilde{\chi}_j \leq 1$, $\tilde{\chi}_j = 1$ sur un voisinage de K_j. Notant χ_j la restriction de $\tilde{\chi}_j$ à Ω_j, on a

(4.8) $\qquad \chi_j \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}_j)$ (cf. (2.5)), $0 \leq \chi_j \leq 1$, $\chi_j = 1$ dans un voisinage de $K_j \cap \Omega_j$.

On définit alors $\tilde{T}_j$ par

(4.9) $\qquad \langle \tilde{T}_j, \psi \rangle = \langle T_j, \chi_j \psi \rangle \ , \ \psi \in \mathcal{F}(\Omega_j)$.

Utilisant le Lemma 4.1 (valable quand Ω_o et remplacé par Ω_j ; cf. Remarque 4.2) on a $\tilde{T}_j \in \mathcal{F}'(\Omega_j)$. Remarquant ensuite que tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega_j)$ peut s'écrire $\phi = \chi_j\phi + (1-\chi_j)\phi$, et se servant des propriétés de χ_j ((4.8)) on a $\langle \tilde{T}_j, \phi \rangle = \langle T_j, \phi \rangle$, $\phi \in \mathcal{D}(\Omega_j)$, d'où il résulte que $\tilde{T}_j$ prolonge T_j à $\mathcal{F}(\Omega_j)$, et que $\tilde{T}_j$ est unique (en effet $\mathcal{D}(\Omega_j)$ est dense dans $\mathcal{F}(\Omega_j)$: Proposition 3.4).

Montrons maintenant que :

b) T est continue sur $\mathcal{D}(\Omega_o)$ muni de la topologie de $\mathcal{F}(\Omega_o)$.

On doit montrer qu'à tout $\varepsilon > 0$ on peut associer un compact $K_\varepsilon \subset \Omega_o$, $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ et $C_\varepsilon > 0$ tels qu'on ait (4.4). Comme tout fermé F_ε ((3.7)) est contenu dans un certain F_j ((3.11)), il suffit de vérifier cette propriété de la Remarque 4.1 pour F_j, $\forall j \in \mathbb{N}^*$.

Soit alors F_j un fermé quelconque de la suite (3.11). D'après le Lemme 4.2 F_j est un fermé de Ω_{j+1} de la forme (3.7). Comme par ailleurs $\tilde{T}_{j+1} \in \mathcal{F}'(\Omega_{j+1})$ (d'après le point a) précédent), on a (cf. (4.9))

(4.10) $\quad |<\tilde{T}_{j+1},\psi>| \leq C_j p_{K_j,m_j}(\psi) \quad \forall\, \psi \in \mathcal{F}(\Omega_{j+1})$, supp $\psi \subset F_j$

(il suffit d'appliquer la Proposition 4.1, avec $\Omega_o \equiv \Omega_j$, $\varepsilon \equiv \dfrac{1}{(j+1)(j+2)}$ (Lemme 4.2), $T \equiv \tilde{T}_{j+1}$, $F_\varepsilon \equiv F_j$) où K_j est un compact de Ω_{j+1}, $m_j \in \mathbb{N}^*$, $C_j > 0$.

Prenant dans (4.10) $\psi \in \mathcal{D}(\Omega_o)$, supp $\psi \subset F_j$ (en effet si ψ est une telle fonction, alors $\psi \in \mathcal{D}(\Omega_{j+1})$) et notant que $<\tilde{T}_{j+1},\phi> = <T_{j+1},\phi> = <T,\phi>$ pour $\phi \in \mathcal{D}(\Omega_{j+1})$, on a finalement le résultat voulu. Ceci achève la démonstration de l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii).

Montrons enfin que (ii) entraîne (i).

Soit T, satisfaisant à la condition (ii), et soit $\varepsilon > 0$. Alors (Remarque 4.1) il existe un compact $K_\varepsilon \subset \Omega_o$, $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ et $C_\varepsilon > 0$ tels qu'on ait (4.4). Soit Ω_ε l'ouvert associé à ε (cf. (3.6)), i.e. $F_\varepsilon = \bar{\Omega}_\varepsilon$. Notant T_ε la restriction de T à Ω_ε ($T_\varepsilon \in \mathcal{D}'(\Omega_\varepsilon)$), on a d'après (4.4)

(4.11) $\quad |<T_\varepsilon,\phi>| \leq C_\varepsilon p_{K_\varepsilon,m_\varepsilon}(\phi) \quad \forall\, \phi \in \mathcal{D}(\Omega_\varepsilon)$.

La propriété (4.11) montre que supp $T_\varepsilon \subset K_\varepsilon \cap \Omega_\varepsilon$ (= borné) ce qui achève complètement la démonstration.

<u>Remarque 4.3</u> : Soit Ω_j (et plus généralement Ω_ε ((3.6)) un ouvert de la suite (3.10). Soit $T \in \mathcal{F}'(\Omega_o)$. L'injection naturelle (i.e. prolongement par zéro à Ω_o) de $\mathcal{F}(\Omega_j)$ dans $\mathcal{F}(\Omega_o)$ étant continue (vérification facile), on peut définir, par transposition, la restriction de T à Ω_j comme étant l'unique élément S vérifiant

$$S \in \mathcal{F}'(\Omega_j)$$
$$<S,\psi> = <T,\psi> \quad \forall\, \psi \in \mathcal{F}(\Omega_j).$$

Ceci justifie l'accouplement $<T,\psi>$, $T \in \mathcal{F}'(\Omega_o)$, $\psi \in \mathcal{F}(\Omega_j)$ que nous utiliserons dans la remarque suivante.

<u>Remarque 4.4</u> : Soit T une distribution sur Ω_o, localement à support borné. Notons

(4.12) $\quad \tilde{T}$ ($\tilde{T} \in \mathcal{F}'(\Omega_o)$) le prolongement de T à $\mathcal{F}(\Omega_o)$

(4.13) $\quad T_j$ ($T_j \in \mathcal{D}'(\Omega_j)$) la restriction de T à Ω_j ((3.10))

(4.14) $\tilde{T}_j$ $(\tilde{T}_j \in \mathcal{F}'(\Omega_j))$ le prolongement de T_j à $\mathcal{F}(\Omega_j)$.

Alors

(4.15) $\langle\tilde{T},\psi\rangle = \langle\tilde{T}_j,\psi\rangle \quad \forall\, \psi \in \mathcal{F}(\Omega_j)$.

En effet, comme $\mathcal{D}(\Omega_j)$ est dense dans $\mathcal{F}(\Omega_j)$, il suffit de montrer que (4.15) est vérifié par tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega_j)$. Or cela est évident, car $\tilde{T}$ coïncide avec T sur $\mathcal{D}(\Omega_o)$, et $\tilde{T}_j$ coïncide avec T_j sur $\mathcal{D}(\Omega_j)$ (i.e. $\tilde{T}_j$ coïncide avec T sur $\mathcal{D}(\Omega_j)$).

<u>Cas particulier intéressant</u> : Les distributions à support borné.

On a la

<u>Proposition 4.2</u> : Soit T une distribution sur Ω_o, à support borné. Alors T est (prolongeable en) un élément de $\mathcal{F}'(\Omega_o)$.

<u>Preuve</u> : Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega_o)$, à support borné. Alors supp $T \subset K_T \cap \Omega_o$ où K_T est un compact de $\bar{\Omega}_o$. Soit alors χ (elle se construit comme χ_j en (4.8)),

(4.16) $\chi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}_o)$, $0 \le \chi \le 1$, $\chi = 1$ dans un voisinage de $K_T \cap \Omega_o$.

Définissons $\tilde{T}$ par

(4.17) $\langle\tilde{T},\psi\rangle = \langle T,\chi\psi\rangle$, $\psi \in \mathcal{F}(\Omega_o)$.

Utilisant le Lemme 4.1 et suivant la démonstration (partie a) du Théorème 4.1, on obtient le résultat voulu. □

Dans la suite de cette étude, nous identifierons (cela est loisible, d'après tout ce qui précède) l'espace $\mathcal{F}'(\Omega_o)$ et l'ensemble des distributions sur Ω_o, localement à support borné. Cela signifie que l'on identifie T (distribution localement à support borné) à $\tilde{T}$ (son prolongement, Remarque 4.4). Précisons alors la signification du symbole $\langle T,\psi\rangle$, $\psi \in \mathcal{F}(\Omega_o)$. Notons d'abord que si $\psi \in \mathcal{F}(\Omega_o)$, il existe j tel que $\psi \in \mathcal{F}(\Omega_j)$. En effet si $\psi \in \mathcal{F}(\Omega_o)$, par définition il existe j (qu'on peut choisir ≥ 2) tel qu'on ait supp $\psi \subset \bar{\Omega}_{j-1} \subset \Omega_j$. Alors, grâce au Lemme 4.2, il est loisible d'identifier ψ à sa restriction à Ω_j, i.e. $\psi|_{\Omega_j} \in \mathcal{F}(\Omega_j)$. Ceci étant, soit T une distribution sur Ω_o, localement à support borné. Si $\psi \in \mathcal{F}(\Omega_o)$, le symbole $\langle T,\psi\rangle$ a le sens suivant :

(4.18) $\quad <T,\psi> \; = \; <T_j, \chi_j \psi>$

où $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $\psi \in \mathcal{F}(\Omega_j)$, T_j = restriction de T à Ω_j, χ_j = fonction vérifiant (4.8)

(on vérifie facilement que le deuxième membre (4.18) ne dépend pas de l'entier j).

Si, de plus, T est (globalement) à support borné, la relation (4.17) montre qu'on peut définir plus simplement $<T,\psi>$, i.e.

(4.19) $\quad <T,\psi> \; = \; <T,\chi\psi> \quad , \; \psi \in \mathcal{F}(\Omega_o)$

où χ est donné par (4.16). □

Avec les développements précédents, on peut maintenant espérer étendre à l'ouvert Ω_o les notions et résultats du § 2, sect. I. □

4.3. Extension de la notion de transformée périodique. Transformée périodique d'une distribution localement à support borné.

On a d'abord le résultat suivant :

Lemme 4.3. L'opérateur $\bar{\omega}$ (de transformation périodique ; cf. § 2, sect. XI) est continu de $\mathcal{D}(\Omega_o)$ dans $\mathcal{F}(\Omega_o)$.

Démonstration : Soit K un compact de Ω_o. Alors il existe $j_o \in \mathbb{N}^*$ tel que $K \subset F_{j_o}$ ((3.11)). Comme F_{j_o} est invariant par Y-périodicité ((3.17), Remarque 3.2) on a $K + a_\lambda \subset F_{j_o}$, $\forall\, a_\lambda \in \prod_{i=1}^{n} a_i\, \mathbb{Z}$. Donc, si $\phi \in \mathcal{D}_K(\Omega_o)$, on a

$\bar{\omega}\phi \in \mathcal{F}_{F_{j_o}}(\Omega_o)$. Mais l'opérateur $\bar{\omega}$ est continu de $\mathcal{D}_K(\Omega_o)$ dans $\mathcal{F}_{F_{j_o}}(\Omega_o)$ (la démonstration est identique à celle de (2.7), sect. I), d'où le Lemme 4.3.□

- Transformée périodique d'une distribution à support borné.

Démontrons la

Proposition 4.3. : Pour toute distribution T sur Ω_o à support borné, on définit $\bar{\omega}T$ par

(4.20) $\quad <\bar{\omega}T,\phi> \; = \; <T,\bar{\omega}\phi> \quad , \; \phi \in \mathcal{D}(\Omega_o)$.

Alors $\bar{\omega}T$ est une distribution sur Ω_o, Y-périodique, i.e. $\bar{\omega}T \in \mathcal{Q}(\Omega_o)$. En outre l'application $T \to \bar{\omega}T$ est linéaire.

Démonstration : D'après le Lemme 4.3 et la formule (4.19), l'application $\phi \to \langle T, \bar{\omega}\phi\rangle$ est linéaire continue de $\mathcal{D}(\Omega_o)$ dans $\mathbb{C}$; donc $\bar{\omega}T$ est une distribution sur Ω_o.

Soit maintenant $\lambda \in \mathbb{Z}^n$, et τ_λ l'opérateur de translation associé au vecteur a_λ (cf. (1.20), (1.21), Sect. I). Pour $\phi \in \mathcal{D}(\Omega_o)$ on a $\langle\tau_\lambda(\bar{\omega}T), \phi\rangle$ = $\langle\bar{\omega}T, \tau_{-\lambda}\phi\rangle$ $\langle T, \bar{\omega}(\tau_{-\lambda}\phi)\rangle = \langle T, \bar{\omega}\phi\rangle$ (car $\bar{\omega}\phi$ est Y-périodique), d'où $\tau_\lambda(\bar{\omega}T) = \bar{\omega}T$, ce qui démontre la périodicité de $\bar{\omega}T$. La linéarité de $T \to \bar{\omega}T$ se vérifie sans difficulté. □

La distribution $\bar{\omega}T$ est appelée la transformée périodique de $T \in \mathcal{E}'(\Omega_o)$. On vérifie facilement (comme dans Vo-Khac Khoan [2], p. 63) qu'on a

(4.21) $$\bar{\omega}T = \sum_\lambda \tau_\lambda T \quad \text{(somme finie)} \; ; \; T \in \mathcal{E}'(\Omega_o), \text{ à support borné.}$$ □

- Cas général d'une distribution localement à support borné.

On a la

Proposition 4.4. : Pour toute distribution T localement à support borné dans Ω_o, il existe une distribution $\bar{\omega}T$, et une seule, telle que

(4.22) $$\langle\bar{\omega}T, \phi\rangle = \langle T, \bar{\omega}\phi\rangle \; , \; \phi \in \mathcal{D}(\Omega_o) \; .$$

La distribution $\bar{\omega}T$ est Y-périodique, i.e. $\bar{\omega}T \in Q(\Omega_o)$, et l'application $T \to \bar{\omega}T$ est linéaire.

Démonstration : Soit $T \in \mathcal{E}'(\Omega_o)$. On introduit la suite Ω_j ((3.10)) et l'on pose T_j = restriction de T à Ω_j. D'après la Proposition 4.3 il existe (l'analogie est évidente. Noter que Ω_j est invariant par Y-périodicité d'après la Remarque 3.2) $\bar{\omega}T_j$ distribution sur Ω_j, Y-périodique, telle que

(4.23) $$\langle\bar{\omega}T_j, \phi\rangle = \langle T_j, \bar{\omega}\phi\rangle \quad , \; \phi \in \mathcal{D}(\Omega_j)$$

où l'on note $\langle T_j, \bar{\omega}\phi\rangle$ le deuxième membre de (4.18) pour $\psi = \bar{\omega}\phi$.

On vérifie sans difficulté (en utilisant au besoin (4.15)) que la famille $\bar{\omega}T_j$ ($j \in N^*$) ainsi construite satisfait à la relation de compatibilité

(4.24) $$\bar{\omega}T_{j+1} = \bar{\omega}T_j \quad \text{sur} \quad \Omega_j \; .$$

Avec la propriété (4.24), le "principe de recollement des morceaux" est applicable (cf. L. Schwartz [1]). Il existe alors $\bar{\omega}T \in \mathcal{D}'(\Omega_o)$, uniquement défini par

$$(4.25)\qquad \langle\bar{\omega}T,\ \phi\rangle = \sum_j \langle\bar{\omega}T_j,\ \alpha_j\ \phi\rangle \quad ,\ \phi \in \mathcal{D}(\Omega_o)$$

où $\{\alpha_j\}$ est une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\{\Omega_j\}$, et on a

$$(4.26)\qquad \bar{\omega}T = \bar{\omega}T_j \quad \text{sur} \quad \Omega_j\ .$$

Démontrons que le deuxième membre de (4.25) est égal à celui de (4.22) (pour une même fonction $\phi \in \mathcal{D}(\Omega_o)$). Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega_o)$. On a $\phi = \sum_j \alpha_j\ \phi$ (somme finie) et par suite $\bar{\omega}\phi = \sum_j \bar{\omega}(\alpha_j\phi)$. Ecrivant alors $\langle T,\bar{\omega}\phi\rangle = \sum_j \langle T,\bar{\omega}(\alpha_j\phi)\rangle$, utilisant ensuite l'égalité (4.15) (où l'on a supprimé le signe "~". Noter que $\bar{\omega}(\alpha_j\phi) \in \mathcal{F}(\bar{\Omega}_j)$) et la relation (4.23) on obtient l'égalité voulue. La Y-périodicité de $\bar{\omega}T$ se déduit aisément de (4.26), $\bar{\omega}T_j$ étant Y-périodique $\forall j$. La linéarité de $T \to \bar{\omega}T$ s'obtient sans aucune difficulté. □

- Transformée périodique d'une fonction de $\mathcal{D}(\bar{\Omega}_o)$.

Pour $\psi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}_o)$ ((2.5)), on définit la transformée périodique $\bar{\omega}\psi$(soit en passant par celle de $\tilde{\psi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\tilde{\psi} = \psi$ dans Ω_o ; soit en utilisant le fait que $\psi \in \mathcal{F}'(\Omega_o)$) par

$$(4.27)\qquad \bar{\omega}\psi = \sum_\lambda \tau_\lambda\ \psi \qquad \text{(somme finie)},$$

et l'on a $\bar{\omega}\psi \in \mathcal{E}(\Omega_o)$, $\bar{\omega}\psi$ Y-périodique. □

- Partition périodique dans $\mathcal{D}(\bar{\Omega}_o)$ de l'unité.

Soit θ une $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-partition périodique de l'unité (§ 2, sect. I). On pose $\theta_o = \theta|_{\Omega_o}$ = restriction de θ à Ω_o. Alors

$$(4.28)\qquad \theta_o \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}_o)\ ,\quad \bar{\omega}\theta_o = 1.$$

Nous appellerons $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$-partition périodique de l'unité toute fonction vérifiant (4.28). □

5. - QUELQUES RESULTATS FONDAMENTAUX

5.1. L'espace $\mathcal{F}_{per}(\Omega_o)$.

On définit

(5.1) $\qquad \mathcal{F}_{per}(\Omega_o) = \{\psi \in \mathcal{S}(\Omega_o)\ ;\ \psi$ Y-périodique, $\psi=0$ dans un voisinage du bord $\gamma\}$

$(\gamma = \partial\Omega_o = \text{bord de } \Omega_o)$.

Notons que :

(i) si $\psi \in \mathcal{F}_{per}(\Omega_o)$, il existe un ensemble fermé (dans l'espace topologique $\mathbb{R}^n$) F tel que

$$F \subset \Omega_o \quad , \quad \text{supp } \psi \subset F$$

(ii) comme ψ est Y-périodique, on peut toujours choisir F invariant par Y-périodicité, i.e.

(5.2) $$F = \bigcup_{\lambda} (K_o + a_\lambda)$$

où K_o est un compact contenu dans $\overset{-o-}{Y_o}$ (cf. (1.14), sect. I) et jouissant de la propriété suivante :

(5.3) $\qquad K_o$ est compatible avec la périodicité.

Cette condition signifie ceci : soit ∂K_o le bord de K_o. Définissons $\pi(y_i=0)$, $\pi(y_i=a_i)$, b_i comme en (1.3), (1.8) de la sect. I, puis posons
$\partial K_0(y_i=0) = \partial K_o \cap \pi(y_i=0)$
$\partial K_o(y_i=a_i) = \partial K_o \cap \pi(y_i=a_i)$.
Dire que K_o vérifie (5.3) signifie qu'on a les égalités

(5.4) $$\partial K_o(y_i=a_i) = \partial K_o(y_i=0) + b_i \quad \forall i \quad (1 \leq i \leq n)$$

(ainsi, si on a $\partial K_o(y_i=0) = \emptyset$ (= ensemble vide) pour un certain i, alors $\partial K_o(y_i=a_i) = \emptyset$, et réciproquement). □

Avec les remarques précédentes on voit facilement que $\mathcal{F}_{per}(\Omega_o)$ est identique à l'ensemble des fonctions

$$\psi \in \mathcal{F}(\Omega_o) \quad , \quad \psi \text{ Y-périodique}$$

et que, par conséquent,

(5.5) $\qquad \mathcal{F}_{per}(\Omega_o)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{F}(\Omega_o)$.

Il est alors naturel de munir $\mathcal{F}_{per}(\Omega_o)$ d'une topologie limite inductive. On définit pour cela l'espace vectoriel

$$(5.6) \qquad \mathcal{F}_{perF_j}(\Omega_o) = \{ \psi \in \mathcal{F}_{F_j}(\Omega_o) \ ; \ \psi \quad \text{Y-périodique} \}$$

où $\mathcal{F}_{F_j}(\Omega_o)$ est donné par (3.12).

$\mathcal{F}_{perF_j}(\Omega_o)$ est fermé dans $\mathcal{F}_{F_j}(\Omega_o)$ et donc, est un espace de Fréchet pour la topologie de $\mathcal{F}_{F_j}(\Omega_o)$ (i.e. de $\mathcal{E}(\Omega_o)$).

Le résultat suivant est alors immédiat :

<u>Proposition 5.1.</u> : L'espace $\mathcal{F}_{per}(\Omega_o)$ peut être muni de la topologie limite inductive des espaces de Fréchet $\mathcal{F}_{perF_j}(\Omega_o)$ $(j \in \mathbb{N}^*)$. □

On va introduire dans $\mathcal{F}_{perF_j}(\Omega_o)$ une famille de semi-normes utile pour notre objet.

L'ensemble $\overset{-o-}{Y_o}$ étant défini en (1.14), sect. I, et $\bar{Y}_{oj}$ en (3.16) (Remarque 3.2) on a (voir (3.7))

$$(5.7) \qquad F_j \cap \overset{-o-}{Y_o} = \bar{Y}_{oj} \quad \text{(compact)}$$

On pose alors pour tout $m \in \mathbb{N}^*$

$$(5.8) \qquad p_{j,m}(\psi) = \sup_{\substack{y \in \bar{Y}_{oj} \\ |\alpha| \leq m}} |D^\alpha \psi(y)| \ , \quad \psi \in \mathcal{F}_{perF_j}(\Omega_o) \ .$$

On a la

<u>Proposition 5.2.</u> : La topologie de l'espace de Fréchet $\mathcal{F}_{perF_j}(\Omega_o)$ est identique à celle définie à l'aide de la famille de semi-normes $\{p_{j,m}\}^j_{m \in \mathbb{N}^*}$ ((5.8)).

<u>Démonstration</u> : En suivant une démarche analogue à celle de la Proposition 1.1 de la sect I, on a pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout compact $K \subset \Omega_o$:

$$p_{K,m}(\psi) \leq p_{j,m}(\psi) \quad \forall \psi \in \mathcal{F}_{perF_j}(\Omega_o) \ ,$$

d'où l'on déduit le résultat. □

Dans toute la suite de ce travail, la topologie des $\mathfrak{F}_{perF}(\Omega_o)$ sera définie à l'aide des semi-normes (5.8). Muni de la topologie limite inductive correspondante

(5.9) $\mathfrak{F}_{per}(\Omega_o)$ est un LF. $\square$

5.2. <u>Propriétés fondamentales</u>

On a la

<u>Proposition 5.3.</u> :

(i) l'application linéaire $\bar{\omega}$ envoie continûment $\mathcal{D}(\Omega_o)$ dans $\mathfrak{F}(\Omega_o)$ (resp. $\mathfrak{F}_{per}(\Omega_o)$) et $\mathfrak{F}'(\Omega_o)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega_o)$ ($\mathfrak{F}'(\Omega_o)$ et $\mathcal{D}'(\Omega_o)$ munis de la topologie duale faible).

(ii) pour tout $T \in \mathfrak{F}'(\Omega_o)$, la distribution $\bar{\omega}T$ est Y-périodique

(iii) pour tout $U \in \mathcal{Q}(\Omega_o)$ ((2.6)) et tout $\phi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}_o)$, on a

(5.10) $\bar{\omega}(\phi U) = (\bar{\omega}\phi)\ U$.

Pour tout $\psi \in \mathfrak{F}_{per}(\Omega_o)$ et tout $T \in \mathfrak{F}'(\Omega_o)$, on a

(5.11) $\bar{\omega}(\psi T) = \psi(\bar{\omega}T)$.

<u>Preuve</u> :

(i) la continuité de $\bar{\omega}$, de $\mathcal{D}(\Omega_o)$ dans $\mathfrak{F}(\Omega_o)$ a été établie Lemme 4.3. Celle de $\bar{\omega}$, de $\mathcal{D}(\Omega_o)$ dans $\mathfrak{F}_{per}(\Omega_o)$ s'en déduit aisément.
Montrons que $\bar{\omega}$ est continu de $\mathfrak{F}'(\Omega_o)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega_o)$:

Comme $T \in \mathfrak{F}'(\Omega_o)$ signifie (par définition) que $T|_{\Omega_\varepsilon}$ est une distribution sur Ω_ε (ouvert de la forme (3.6)) à support borné, il suffit de montrer que la propriété est satisfaite localement : Soit donc $T \in \mathfrak{F}'(\Omega_o)$. Désignant par T_ε la restriction de T à Ω_ε (Ω_ε quelconque de la forme (3.6)), on a (cf. (4.21))

$$\bar{\omega}\, T_\varepsilon = \sum_\lambda \tau_\lambda T_\varepsilon \quad \text{(somme finie).}$$

Or l'application $T_\varepsilon \to \tau_\lambda T_\varepsilon$ est continue sur $\mathcal{D}'(\Omega_\varepsilon)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{Z}^n$, et donc aussi $T_\varepsilon \to \bar{\omega}T_\varepsilon$, en tant que somme finie d'applications linéaires continues sur $\mathcal{D}'(\Omega_\varepsilon)$; d'où le résultat.

(ii) ce point a été démontré dans la Proposition 4.4

(iii) Preuve de (5.10) : on a $\phi U \in \mathcal{D}'(\Omega_o)$, ϕU à support borné. Utilisant alors la décomposition (4.21) et tenant compte de la périodicité de U, on obtient (5.10).

Preuve de (5.11) : on a évidemment $\psi T \in \mathcal{F}'(\Omega_o)$. On introduit T_j (resp. ψ_j), i.e. la restriction de T (resp. ψ) à Ω_j ((3.10)). On a $T_j \in Q(\Omega_j)$; $\psi_j \in \mathcal{E}(\Omega_j)$, ψ_j Y-périodique. Il en résulte que (vérification facile) $\bar{\omega}(\psi_j T_j) = \psi_j(\bar{\omega}T_j)$; or $\bar{\omega}(\psi T) = \bar{\omega}(\psi_j T_j)$ sur Ω_j et $\psi(\bar{\omega}T) = \psi_j(\bar{\omega}T_j)$ sur Ω_j. Utilisant alors le Principe de localisation des distributions (cf. L. Schwartz [1]) on a le résultat voulu. □

On a le

Lemme 5.1. : (de surjectivité). Toute fonction $\psi \in \mathcal{F}_{per}(\Omega_o)$ est de la forme $\psi = \bar{\omega}\phi$ où $\phi \in \mathcal{D}(\Omega_o)$. Toute distribution périodique $U \in Q(\Omega_o)$ est de la forme $U = \bar{\omega}w$, $w \in \mathcal{F}'(\Omega_o)$.

Preuve : On définie $\phi = \theta_o\psi$, $w = \theta_o U$, où θ_o est une $\mathcal{D}(\bar{\Omega}_o)$-partition périodique de l'unité ((4.28)), et l'on utilise (5.10) (avec $\phi = \theta_o$) et (5.11) (avec $T = \theta_o$). □

Définissons maintenant

(5.12) $\quad \mathcal{F}'_{per}(\Omega_o)$ = dual (topologique) de $\mathcal{F}_{per}(\Omega_o)$.

Pour $\overset{o}{u} \in \mathcal{F}'_{per}(\Omega_o)$, $\psi \in \mathcal{F}_{per}(\Omega_o)$, nous noterons

(5.13) $\quad \langle \overset{o}{u}, \psi\rangle_o$ la valeur de $\overset{o}{u}$ en ψ .

On a le résultat d'isomorphisme suivant (analogue du Théorème 2.1., sect. I).

Proposition 5.4. : Les espaces vectoriels topologiques $\mathcal{F}'_{per}(\Omega_o)$ et $Q(\Omega_o)$ sont isomorphes (algébriquement et topologiquement).

Preuve : La démarche est exactement celle du Théorème 2.1 de la sect. I. Soit θ_o une fonction vérifiant (4.28). On définit ${}^t\theta_o$ par

(5.14) $\quad \langle {}^t\theta_o U, \psi\rangle_o = \langle U, \theta_o\psi\rangle$; $U \in \mathcal{D}'(\Omega_o)$, $\forall\psi \in \mathcal{F}_{per}(\Omega_o)$,

puis la transposée de l'opérateur $\bar{\omega}$ par

(5.15) $\quad <^t\bar{\omega}\,\overset{o}{u},\phi> \;=\; <\overset{o}{u},\,\bar{\omega}\phi>_o \;;\quad \overset{o}{u}\in \mathfrak{F}'_{per}(\Omega_o)\;,\;\forall\phi\in\mathcal{D}(\Omega_o)$

($<,>_o$ étant défini en (5.13)).
Alors (cf. Théorème 2.1, sect. I) ${}^t\theta_o$ est continu de $\mathcal{Q}(\Omega_o)$ dans $\mathfrak{F}'_{per}(\Omega_o)$, ${}^t\bar{\omega}$ est continu de $\mathfrak{F}'_{per}(\Omega_o)$ dans $\mathcal{Q}(\Omega_o)$, et on a ${}^t\theta_o\,{}^t\bar{\omega}$ = identité de $\mathfrak{F}'_{per}(\Omega_o)$, ${}^t\bar{\omega}\,{}^t\theta_o$ = identité de $\mathcal{Q}(\Omega_o)$. □

6. LES ESPACES $\mathcal{D}_{per}(Y_o)$ ET $\mathcal{D}'_{per}(Y_o)$

Les notations des paragraphes précédents sont inchangées. L'ouvert Y_o désigne toujours l'ensemble défini au § 1 de la sect. I, auquel on associe l'ensemble $\overset{-o-}{Y_o} = \bar{Y}_o - \gamma_o$

où $\bar{Y}_o$ est l'adhérence de Y_o, γ_o le morceau de ∂Y_o (= bord de Y_o) qui n'est pas contenu dans $\Gamma = \partial Y$ (= bord de Y). On rappelle que la réunion de toutes les translatées ($\overset{-o-}{Y_o} + a_\lambda$,$\lambda\in\mathbb{Z}^n$; cf. (1.22), sect. I) de $\overset{-o-}{Y_o}$ est l'ensemble Ω_o. On note $\gamma = \partial\Omega_o$ le bord de Ω_o.

6.1. L'espace $\mathcal{D}_{per}(Y_o)$

Définissons

(6.1) $\quad \mathcal{D}_{per}(Y_o) = \{\psi|\psi$ défini et de classe C^∞ sur $\overset{-o-}{Y_o}$, $D^\alpha\psi$ Y-périodique $\forall\alpha\in\mathbb{N}^n$, $\psi = 0$ dans un voisinage de $\gamma\}$,

où "$D^\alpha\psi$ Y-périodique" signifie que $D^\alpha\psi$ prend des valeurs égales sur les faces opposées de Y_o, i.e. $D^\alpha\psi\,|_{\Pi(y_i=0)} = D^\alpha\psi\,|_{\Pi(y_i=a_i)}$ $\forall i$
($\Pi(y_i=0)$ et $\Pi(y_i=a_i)$ étant définis en (1.3) Sect. I).

On va structurer l'espace vectoriel $\mathcal{D}_{per}(Y_o)$ en un espace LF.
On introduit la suite de compacts (cf. Remarque 3.2)

(6.2) $\quad \bar{Y}_{oj} = \{y\in\overset{-o-}{Y_o}\;;\; d(y,\gamma)\;\geq\frac{1}{j+1}\}\;,\quad j\in\mathbb{N}^*$

puis l'on définit l'espace vectoriel

(6.3) $\quad \mathcal{D}_{per,j}(Y_o) = \{\,\psi\mid\psi$ défini et de classe C^∞ sur $\overset{-o-}{Y_o}$, $D^\alpha\psi$ Y-périodique $\forall\alpha\in\mathbb{N}^n$, supp $\psi\subset\bar{Y}_{oj}$ }.

On a le

Lemme 6.1. : Pour tout $j\in\mathbb{N}^*$, les espaces vectoriels $\mathcal{D}_{per,j}(Y_o)$ et $\mathfrak{F}_{per\,F_j}(\Omega_o)$ sont isomorphes (algébriquement).

Preuve : Notons

(6.4) R_o la restriction à Y_o (i.e. $|_{Y_o}$)

(6.5) $\overset{-o-}{R_o}$ la restriction à $\overset{-o-}{Y_o}$ (i.e. $|_{\overset{-o-}{Y_o}}$)

(6.6) P_o le prolongement à Ω_o par Y-périodicité.

Alors, pour $j \in \mathbb{N}^*$, on vérifie facilement que l'espace $\mathcal{F}_{per\,F_j}(\Omega_o)$ défini en (5.6) est algèbriquement isomorphe à $\mathcal{D}_{per,j}(Y_o)$, les applications linéaires (inverse l'une de l'autre) qui définissent cet isomorphisme étant $\overset{-o-}{R_o}$ et P_o (noter l'expression (3.7), Remarque 3.2, du fermé F_j). ∎

On rappelle (cf. § 5) que la topologie de l'espace de Fréchet $\mathcal{F}_{per\,F_j}(\Omega_o)$ est définie à l'aide des semi-normes (5.8). On introduit sur $\mathcal{D}_{per,j}(Y_o)$ la famille de semi-normes (encore notées $p_{j,m}$)

(6.7) $$p_{j,m}(\psi) = \sup_{\substack{y \in \bar{Y}_{oj} \\ |\alpha| \leq m}} |D^\alpha \psi\,(y)|\ , \quad \psi \in \mathcal{D}_{per,j}(Y_o)\ ;\ m \in \mathbb{N}$$

(qui structure alors $\mathcal{D}_{per,j}(Y_o)$ en un espace vectoriel topologique localement convexe, séparé, à base dénombrable de voisinages de l'origine ; cf. L. Schwartz [1] , Vo-Khac Khoan [1]).

On a alors la

Proposition 6.1. : Muni de la famille de semi-normes $\{p_{j,m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ ((6.7)), $\mathcal{D}_{per,j}(Y_o)$ est un espace de Fréchet, isomorphe (algébriquement et topologiquement) à $\mathcal{F}_{per\,F_j}(\Omega_o)$.

Preuve : Elle découle tout naturellement de la relation (évidente !) entre les deux espaces vectoriels topologiques (cf. Lemme 6.1 et (5.8)).

On peut maintenant énoncer la

Proposition 6.2. : $\mathcal{D}_{per}(Y_o)$ peut être muni de la topologie limite inductive des espaces de Fréchet $\mathcal{D}_{per,j}(Y_o)$, $j \in \mathbb{N}^*$.

Preuve : On vérifie facilement qu'on a, pour $\mathcal{D}_{per}(Y_o)$ et $\{\mathcal{D}_{per,j}(Y_o)\}_{j \in \mathbb{N}^*}$, un résultat analogue au Lemme 3.1. Le résultat voulu s'en déduit alors suivant Vo-Khac Khoan [1]. □

On vient ainsi de montrer que l'espace $\mathcal{D}_{per}(Y_o)$ est un LF. La caractérisation des applications linéaires continues sur $\mathcal{D}_{per}(Y_o)$, des suites convergentes dans $\mathcal{D}_{per}(Y_o)$, ainsi que toutes les autres propriétés (d'un LF.) susceptibles de nous intéresser ici, se déduisent de la théorie générale des espaces LF. (cf. L. Schwartz [1] , Vo-Khac-Khoan [1]). □

Le résultat suivant se déduit aisément des Propositions 6.1. et 6.2.

<u>Théorème 6.1.</u> Les espaces vectoriels topologiques $\mathcal{D}_{per}(Y_o)$ et $\mathcal{F}_{per}(\Omega_o)$ sont isomorphes (algébriquement et topologiquement). □

On rappelle que les applications linéaires continues (et inverse l'une de l'autre) qui associent $\mathcal{D}_{per}(Y_o)$ et $\mathcal{F}_{per}(\Omega_o)$ dans le Théorème 6.1 sont $\overset{-o-}{R_o}$ et P_o (cf. (6.5)(6.6).

6.2. <u>L'espace</u> $\mathcal{D}'_{per}(Y_o)$. <u>Résultat final d'isomorphisme.</u>

On désigne par

(6.8) $\mathcal{D}'_{per}(Y_o)$ le dual (topologique) de $\mathcal{D}_{per}(Y_o)$.

On notera encore <,> le produit de dualité entre $\mathcal{D}'_{per}(Y_o)$ et $\mathcal{D}_{per}(Y_o)$. On munira $\mathcal{D}'_{per}(Y_o)$ de la topologie faible du dual.

On a le résultat suivant :

<u>Théorème 6.2.</u> : Les espaces vectoriels topologiques $\mathcal{D}'_{per}(Y_o)$ et $\mathcal{Q}(\Omega_o)$ sont isomorphes (algébriquement et topologiquement).

<u>Preuve</u> : D'après le Théorème 6.1, les espaces $\mathcal{D}'_{per}(Y_o)$ et $\mathcal{F}'_{per}(\Omega_o)$ sont isomorphes (algébriquement et topologiquement), les applications lineaires continues (inverse l'une de l'autre) entrant en jeu étant les transposées ${}^t\overset{-o-}{R_o}$, ${}^tP_o$. Mais $\mathcal{F}'_{per}(\Omega_o)$ et $\mathcal{Q}(\Omega_o)$ sont deux espaces isomorphes (cf. Proposition 5.4), d'où le Théorème 6.2. □

Ce résultat montre que toute distribution périodique $U \in \mathcal{Q}(\Omega_o)$ est linéairement et continûment associée à un (unique) élément $u \in \mathcal{D}'_{per}(Y_o)$, et réciproquement. Les applications (linéaires et continues, inverse l'une de l'autre) qui les associent sont ${}^t\bar{\omega}$ ${}^t\overset{-o-}{R_o}$, ${}^tP_o$ ${}^t\theta_o$, i.e.

(6.9) $\qquad U = {}^t\bar{\omega}\ {}^t\overset{-o-}{R_o}\ u$

(6.10) $\qquad u = {}^tP_o\ {}^t\theta_o\ U$.

Nous appelerons encore distributions périodiques (sur Y_o) les éléments de $\mathcal{D}'_{per}(Y_o)$. □

Moyennant des substitutions convenables (évidentes !), la Remarque 2.1 et le n° 2.2 (sect. II) sont transférés ici. On a notamment :

(6.11) $\qquad L^2(Y_o) \subset \mathcal{D}'_{per}(Y_o)$

après identification de $L^2(Y_o)$ à son dual.

La dérivation au sens de $\mathcal{D}'_{per}(Y_o)$ se définit sans aucun problème, et est cohérente avec la dérivation aux sens usuels (i.e. au sens classique et au sens des distributions). Pour $u \in \mathcal{D}'_{per}(Y_o)$, la dérivée partielle $\frac{\partial u}{\partial y_i}$ au sens de $\mathcal{D}'_{per}(Y_o)$ est l'unique élément de $\mathcal{D}'_{per}(Y_o)$ donné par

(6.12) $\qquad \langle \frac{\partial u}{\partial y_i}, \psi \rangle = - \langle u, \frac{\partial \psi}{\partial y_i} \rangle \ , \quad \forall \psi \in \mathcal{D}_{per}(Y_o)$

et

(6.13) $\qquad$ l'opérateur $\frac{\partial}{\partial y_i}$ est continu sur $\mathcal{D}'_{per}(Y_o)$.

En outre, si U est l'élément de $\mathcal{Q}(\Omega_{\hat{o}})$ associé à u par (6.9) (ou (6.10)) on a (démonstration analogue à celle de la Proposition 2.1 de la sect. II)

(6.14) $\qquad \frac{\partial U}{\partial y_i} = {}^t\bar{\omega}\ {}^t\overset{-o-}{R_o}\ \frac{\partial u}{\partial y_i}\ , \quad \frac{\partial u}{\partial y_i} = {}^tP_o\ {}^t\theta_o\ \frac{\partial U}{\partial y_i}$

(6.15) $\qquad \langle \frac{\partial u}{\partial y_i}, \phi \rangle = \langle \frac{\partial U}{\partial y_i}, \phi \rangle \qquad \phi \in \mathcal{D}(Y_o)$

(on a évidemment l'inclusion algèbrique $\mathcal{D}(Y_o) \subset \mathcal{D}_{per}(Y_o)$).

où $\frac{\partial U}{\partial y_i}$ est la dérivée partielle de U au sens de $\mathcal{D}'(\Omega_o)$.

Par itération on définit $D^{\alpha}u$ $(\alpha \in \mathbb{N}^n)$ par

$$< D^{\alpha}u,\psi> \;=\; (-1)^{|\alpha|} \;<u,D^{\alpha}\psi> \quad , \quad \psi \in \mathcal{D}_{per}(Y_o)$$

$(|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, où $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n))$

et on a la propriété (6.13) avec l'opérateur D^{α} , et les relations (6.14), (6.15) entre $D^{\alpha}u$ et $D^{\alpha}U$.

7. QUELQUES SOUS-ESPACES REMARQUABLES DE $\mathcal{D}'_{per}(Y_o)$, ET LEURS PROPRIETES.

7.1. Notations. Résultats préliminaires.

Les notations du § 6 sont inchangées. On note $L^2_{loc}(\Omega_o)$ le sous-espace de $\mathcal{D}'(\Omega_o)$ constitué des fonctions localement de carré intégrable, $H^1_{loc}(\Omega_o)$ le sous-espace de $L^2_{loc}(\Omega_o)$ constitué des fonctions dont les dérivées partielles (au sens de $\mathcal{D}'(\Omega_o)$) du premier ordre sont encore dans $L^2_{loc}(\Omega_o)$. On pose

(7.1) $$L^2_{loc}(\Omega_o,Y) = \mathcal{Q}(\Omega_o) \cap L^2_{loc}(\Omega_o)$$

(7.2) $$H^1_{loc}(\Omega_o, Y) = \mathcal{Q}(\Omega_o) \cap H^1_{loc}(\Omega_o) \;,$$

espaces de Hilbert pour les normes respectives

$$\|U\|_{L^2(Y_o)} = \left(\int_{Y_o} |U|^2 dy\right)^{1/2}, \; U \in L^2_{loc}(\Omega_o, Y)$$

$$\|U\|_{H^1(Y_o)} = \left(\int_{Y_o} |U|^2 dy + \sum_i \int_{Y_o} \left|\frac{\partial U}{\partial y_i}\right|^2 dy\right)^{1/2}, \; U \in H^1_{loc}(\Omega_o, Y). \square$$

On a la

Proposition 7.1. On a l'identité

(7.3) $$L^2(Y_o) = {}^tP_o \; {}^t\theta_o(L^2_{loc}(\Omega_o, Y))$$

En outre, la restriction de l'application ${}^tP_o \; {}^t\theta_o$ (resp. ${}^t\bar{\omega} \; {}^t\bar{R}_o$) à $L^2_{loc}(\Omega_o, Y)$ (resp. $L^2(Y_o)$) est identique à l'application R_o = restriction à Y_o (resp. P_o = prolongement par Y-périodicité à Ω_o).

Preuve : Elle peut être calquée sur la Proposition 3.1 de la sect. II. $\square$

Soit $w \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, à support compact, i.e. $w \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. On suppose que $\Omega_o \cap \operatorname{supp} w \neq \emptyset$ (= ensemble vide). Alors il est clair que la restriction de w à Ω_o, i.e. $w|_{\Omega_o}$, est une distribution sur Ω_o, à support borné (cf. § 4, n° 4.2).

On a le

Lemme 7.1. : Soit $w \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ tel que $\Omega_o \cap \operatorname{supp} w$ soit non vide. Alors

(7.4) $$(\bar{\omega} w)|_{\Omega_o} = \bar{\omega}(w|_{\Omega_o}).$$

Preuve : Pour tout $\lambda \in \mathbb{Z}^n$ on a (τ_λ étant défini en (1.21), sect. I) $(\tau_\lambda w)|_{\Omega_o} = \tau_\lambda(w|_{\Omega_o})$. Mais alors $\bar{\omega} w$ s'exprime comme somme finie de translatées de w (cf. (2.10), sect. I). Utilisant alors l'expression analogue (4.21) de $\bar{\omega}(w|_{\Omega_o})$, on obtient l'égalité (7.4). □

7.2. L'espace $H^1_{per}(Y_o)$

On pose (cf. (7.3))

(7.5) $$H^1_{per}(Y_o) = R_o(H^1_{loc}(\Omega_o, Y)).$$

On a le résultat de caractérisation suivant :

Proposition 7.2. : Les conditions suivantes sont équivalentes

(i) $u \in H^1_{per}(Y_o)$

(ii) $u \in H^1(Y_o)$, et

(7.6) les traces de u sont égales sur les faces opposées de Y_o (cf. début du n° 6.1, § 6)

(iii) $u \in L^2(Y_o)$, et

(7.7) les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial y_i}$, au sens de $\mathcal{D}'_{per}(Y_o)$, sont dans $L^2(Y_o)$.

De plus, on a

(7.8) $$\|u\|_{H^1_{per}(Y_o)} = \|u\|_{H^1(Y_o)}$$

où lá norme hilbertienne $\| u \|_{H^1_{per}(Y_o)}$ se définit comme $\| u \|_{H^1(Y_o)}$, les $\frac{\partial u}{\partial y_i}$ étant compris au sens de $\mathcal{D}'_{per}(Y_o)$.

Preuve : La démarche suivie pour les Propositions 3.3 et 3.4 de la sect. I s'adapte parfaitement à la Proposition 7.2. En particulier,

(7.9) pour $u \in H^1_{per}(Y_o)$, $\frac{\partial u}{\partial y_i}$ au sens de $\mathcal{D}'_{per}(Y_o)$ coïncide avec $\frac{\partial u}{\partial y_i}$ au sens de $\mathcal{D}'(Y_o)$. □

On posera (d'après ce qui précède)

(7.10) $$H^1_{per}(Y_o) = \{u \in H^1(Y_o) \ ; \ u \ \ Y\text{-périodique}\}$$

où "u Y-périodique" signifie (7.6).

7.3. Théorème de prolongement

On va établir le résultat de prolongement suivant :

Théorème 7.1. : L'application linéaire

(7.11) $$u \to R_o u \quad (= \text{restriction de } u \text{ à } Y_o)$$

est continue de $H^1_{per}(Y)$ (cf. (3.16), sect. II) dans $H^1_{per}(Y_o)$.

Cette application est surjective, et il existe une application linéaire π_o continue de $H^1_{per}(Y_o)$ dans $H^1_{per}(Y)$, telle que

$$\pi_o \, R_o \, u = u \quad \forall u \in H^1_{per}(Y).$$

Remarque 7.1. : Le théorème 7.1 est évident si l'on remplace $H^1_{per}(Y)$ (resp. $H^1_{per}(Y_o)$) par $L^2(Y)$ (resp. $L^2(Y_o)$). □

Démonstration du Théorème 7.1. : La continuité de (7.11) est évidente. Démontrons qu'elle est surjective. Par définition des espaces $H^1_{per}(Y)$ (cf. (3.13), sect. II) et $H^1_{per}(Y_o)$ (cf. (7.5)), cela revient à montrer que :

(7.12) si $U \in H^1_{loc}(\Omega_o, Y)$, alors il existe $U_p \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^n, Y)$ tel que $U_p|_{\Omega_o} = U$.

Soit donc θ une $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-partition périodique de l'unité (cf. (2.11) sect. I), et $\mathcal{O}_o$ un ouvert de Ω_o vérifiant les conditions (1.28)-(1.30) de la sect. I, où l'entier n_o est choisi de telle sorte qu'on ait

(7.13) $\quad \text{supp}\ \theta \cap \Omega_o \subset \mathcal{O}_o .$

Pour $U \in H^1_{loc}(\Omega_o, Y)$ posons

$$U_o = U\big|_{\mathcal{O}_o}$$

On a $U_o \in H^1(\mathcal{O}_o)$, et grâce à la régularité de $\mathcal{O}_o$, il existe (cf. Lions-Magenes [1], p. 42, Théorème 8.1) $W \in H^1(\mathbb{R}^n)$ tel que

(7.14) $\quad W\big|_{\mathcal{O}_o} = U_o .$

On pose

$$w = \theta W \quad (w \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n))$$

$$w_o = \theta_o U \quad (w_o \in H^1(\Omega_o) \cap \mathcal{D}'(\Omega_o),\ w_o \text{ à support borné})$$

où $\theta_o = \theta\big|_{\Omega_o}$ vérifie (4.28).

On vérifie facilement, grâce à (7.13), (7.14) que $w\big|_{\Omega_o} = w_o$. Par conséquent $\bar\omega(w|_{\Omega_o}) = \bar\omega\, w_o$. Or $\bar\omega w_o = U$ (cf. (5.10), Proposition 5.2 ; et (4.28)), et $\bar\omega(w|_{\Omega_o}) = (\bar\omega w)|_{\Omega_o}$ (Lemme 7.4). Posant alors $\bar\omega w = U_p$, on a $U_p \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^n, Y)$, $U_p|_{\Omega_o} = U$, d'où (7.12) ; ceci démontre la surjectivité de R_o.
L'existence de π_o s'en déduit comme suit : on pose $\text{Ker}\, R_o$ = noyau de R_o, $(\text{Ker}\, R_o)^\perp$ = orthogonal de $\text{Ker}\, R_o$ dans $H^1_{per}(Y)$, S_o = restriction de R_o à $(\text{Ker}\, R_o)^\perp$, et enfin $\pi_o = S_o^{-1}$ (S_o^{-1} existe, car S_o est bijective de $(\text{Ker}\, R_o)^\perp$ sur $H^1_{per}(Y_o)$). On vérifie sans difficulté que π_o est un opérateur fermé de $H^1_{per}(Y_o) \to (\text{Ker}\, R_o)^\perp$, et il suffit d'appliquer le théorème du graphe fermé (cf. par exemple T. Kato [1], p. 166) ; d'où l'on déduit le théorème 7.1. $\square$

<u>Remarque 7.2.</u> : Avec le théorème 7.1, la trace de tout $u \in H^1_{per}(Y_o)$ sur (tout ou partie de) ∂Y_o se définit de façon évidente.

7.4. Les traces sur γ_o

On introduit γ_o, i.e. l'ensemble $\partial Y_o \cap \gamma$ (γ est le bord de Ω_o). On rappelle que γ_o vérifie la condition (1.18) de la sect. I. On définit l'espace des traces

(7.15) $$H^{1/2}_{Y_o per}(\gamma_o) = \{\phi \in L^2(\gamma_o) \ ; \ \phi = u|_{\gamma_o}, u \in H^1_{per}(Y_o)\} .$$

On munit $H^{1/2}_{Y_o per}(\gamma_o)$ de la norme quotient

(7.16) $$\|\phi\|_{H^{1/2}_{Y_o per}(\gamma_o)} = \inf_{\substack{u \in H^1_{per}(Y_o) \\ u|_{\gamma_o} = \phi}} \|u\|_{H^1(Y_o)} ,$$

ce qui en fait un espace de Hilbert.

On a la

Proposition 7.3. : L'application trace

(7.17) $$u \to u|_{\gamma_o}$$

est linéaire continue de $H^1_{per}(Y_o)$ dans $H^{1/2}_{Y_o per}(\gamma_o)$, et il existe un relèvement linéaire continu.

Preuve : Elle peut être calquée sur la preuve de la Proposition 5.1. de la sect. II. □

Le résultat suivant est fondamental pour notre objet. $H^{1/2}_{per}(\gamma_o)$ désigne l'espace des traces des $u \in H^1_{per}(Y)$ (cf. § 5, sect. II).

Proposition 7.4. : On a

(7.18) $$H^{1/2}_{Y_o per}(\gamma_o) = H^{1/2}_{per}(\gamma_o)$$

avec équivalence des normes.

Démonstration : L'égalité (7.18) résulte directement du Théorème 7.1. Reste à démontrer l'équivalence des normes (7.16) et (5.3) (§ 5, sect. II).
Soit $\phi \in H^{1/2}_{Y_o per}(\gamma_o) = H^{1/2}_{per}(\gamma_o)$, et soit $u_\phi \in H^1_{per}(Y)$ le relèvement de ϕ dé-

fini par la Proposition 5.1. de la sect. II, i.e. u_ϕ est défini par les conditions (5.6)-(5.8) de la sect. II. Alors $R_o u_\phi$ (cf. Théorème 7.1) satisfait à $R_o u_\phi \in H^1_{per}(Y_o)$, $(R_o u_\phi)|_{\gamma_o} = \phi$; donc $\|\phi\|_{H^{1/2}_{Y_o per}(\gamma_o)} \leq \|R_o u_\phi\|_{H^1(Y_o)} \leq$ $\|u_\phi\|_{H^1(Y)} = \|\phi\|_{H^{1/2}_{per}(\gamma_o)}$, c'est-à-dire : $\|\phi\|_{H^{1/2}_{Y_o per}(\gamma_o)} \leq \|\phi\|_{H^{1/2}_{per}(\gamma_o)}$.

Ceci montre que l'injection de $H^{1/2}_{per}(\gamma_o)$ dans $H^{1/2}_{Y_o per}(\gamma_o)$ est continue

Mais alors cette injection est linéaire et bijective ; d'où il résulte que les deux normes sont équivalentes (en effet le Théorème du graphe fermé est applicable).

7.5. <u>L'espace</u> $H^1_{oper}(Y_o)$.

On pose

$$(7.19) \qquad H^1_{oper}(Y_o) = \{u \in H^1_{per}(Y_o) \; ; \; u|_{\gamma_o} = 0\} .$$

D'après la Proposition 7.3, l'espace vectoriel $H^1_{oper}(Y_o)$ est fermé dans $H^1_{per}(Y_o)$ et donc, est un espace de Hilbert pour la norme de $H^1(Y_o)$.

On va démontrer le résultat suivant :

<u>Proposition 7.5.</u> : $\mathcal{D}_{per}(Y_o)$ est dense dans $H^1_{oper}(Y_o)$.

<u>Démonstration</u> : On peut voir sans difficulté qu'il revient au même de démontrer que tout $U \in H^1_{loc}(\Omega_o, Y)$ tel que

$$(7.20) \qquad U|_\gamma = 0$$

($\gamma = \partial\Omega_o$ est le bord de Ω_o)

est approché par une suite $\psi_j \in \mathcal{F}_{per}(\Omega_o)$ (cf. §§ 5 et 6 pour la définition de $\mathcal{F}_{per}(\Omega_o)$).

Soit alors θ($\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-partition périodique de l'unité) et $\mathcal{O}_o$ (ouvert borné de Ω_o) introduits lors de la démonstration du Théorème 7.1. On a

$$(7.21) \qquad \operatorname{supp} \theta \cap \Omega_o \subset \mathcal{O}_o .$$

Soit maintenant $U \in H^1_{loc}(\Omega_o, Y)$, et vérifiant (7.20). Montrons qu'il existe

(7.22) $\quad U_\varepsilon \quad (\varepsilon > 0)$ tel que $U_\varepsilon \in H^1_{loc}(\Omega_o, Y)$, supp $U_\varepsilon \subset F_\varepsilon$,
$U_\varepsilon \to U$ dans $H^1_{loc}(\Omega_o, Y)$ pour $\varepsilon \to 0$,

où $F_\varepsilon \subset \Omega_o$, F_ε ensemble fermé (dans l'espace topologique $\mathbb{R}^n$) du type (3.7).

Définissons

(7.23) $\quad \tilde{U}$ = prolongement de U par zéro hors de Ω_o .

On a évidemment $\tilde{U} \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^n, Y)$ (grâce à (7.20)).

Puis posons

$$w = \theta \tilde{U}$$
$$w_o = w|_{\mathcal{O}_o}$$
$$K = \bar{\mathcal{O}}_o \quad \text{(compact de } \mathbb{R}^n)$$

On a

$w \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, supp $w \subset K$, $\bar{\omega} w = \tilde{U}$ (cf. Preuve du Théorème 3.1 de la sect. II pour cette dernière relation ; les deux précédentes résultent de la propriété supp $(\theta U) \subset$ (supp $\theta \cap$ supp U), et de (7.21)).

D'autre part, on remarque que (toujours d'après (7.20), (7.21) et la géométrie de $\mathcal{O}_o$)

(7.24) $\quad w = w_o$ dans $\mathcal{O}_o$, $\quad w = 0$ hors de $\mathcal{O}_o$

$$w_o \in H^1_o(\mathcal{O}_o), \text{ i.e. } w_o \in H^1(\mathcal{O}_o), \quad w_o|_{\partial\mathcal{O}_o} = 0$$

où $\partial\mathcal{O}_o$ désigne le bord (suffisamment régulier) de l'ouvert borné $\mathcal{O}_o$.

Notant que $\mathcal{D}(\mathcal{O}_o)$ est dense dans $H^1_o(\mathcal{O}_o)$, on a

(7.25) $\quad \phi_\varepsilon \to w_o$ dans $H^1(\mathcal{O}_o)$ (fort) lorsque $\varepsilon \to 0$,

où $\quad \phi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_o)$, $\varepsilon > 0$.

Identifiant ϕ_ε à son prolongement par zéro à Ω_o (i.e. $\phi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\Omega_o)$), et définissant $\tilde{\phi}_\varepsilon$ comme en (7.23) (i.e. $\tilde{\phi}_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$), (7.24) et (7.25) impliquent

$$\tilde{\phi}_\varepsilon \to w \text{ dans } H^1(\mathbb{R}^n) \text{ lorsque } \varepsilon \to 0 .$$

Mais alors $\tilde{\phi}_\varepsilon$ et w sont à support dans $K = \bar{\mathcal{O}}_o$, i.e. $\tilde{\phi}_\varepsilon$, $w \in H^1_K(\mathbb{R}^n)$ (cf. le point (3.17) sect. II pour la définition de $H^1_K(\mathbb{R}^n)$) d'où (Lemme 3.1 de la sect. II)

(7.26) $$\bar{\omega}\,\tilde{\phi}_\varepsilon \rightarrow \tilde{U} \text{ dans } H^1_{loc}(\mathbb{R}^n, Y) \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0$$

(avec $\tilde{U} = \bar{\omega} w$).

Il suffit alors de restreindre (7.26) à Ω_o (noter que la restriction $U \rightarrow U|_{\Omega_o}$ est un opérateur continu de $H^1_{loc}(\mathbb{R}^n, Y) \rightarrow H^1_{loc}(\Omega_o, Y)$), d'utiliser ensuite le Lemme 7.1., et de poser enfin $U_\varepsilon = \bar{\omega}\,\phi_\varepsilon$. On a $\bar{\omega}\,\phi_\varepsilon \in \mathcal{F}_{per}(\Omega_o)$ (cf. § 5) et donc U_ε vérifie bien la propriété (7.22).

Il reste à montrer que tout U_ε vérifiant (7.22) est approché par une suite $\psi_j \in \mathcal{F}_{per}(\Omega_o)$: On définit $\tilde{U}_\varepsilon$ comme au point (7.23), et on procède par régularisation suivant le Théorème 3.1, sect. II. On a alors, d'après la Remarque 3.4 de la sect. II, $\tilde{U}_\varepsilon * \alpha_j \rightarrow \tilde{U}_\varepsilon$ dans $H^1_{loc}(\mathbb{R}^n, Y)$ lorsque $j \rightarrow \infty$ où le nombre $r > 0$ (dans la démonstration du Théorème 3.1, sect. II) est choisi de telle sorte que l'on ait $\mathrm{supp}(\tilde{U}_\varepsilon * \alpha_j) \subset \Omega_o$ $\forall j$. Il suffit alors de restreindre à Ω_o comme précédemment. Ceci achève la démonstration de la Proposition 7.5.

7.6. <u>L'espace</u> $H^{-1}_{per}(Y_o)$.

On note

(7.27) $$H^{-1}_{per}(Y_o) = (H^1_{oper}(Y_o))' = \text{dual de } H^1_{oper}(Y_o).$$

D'après la Proposition 7.5 et la continuité (évidente) de l'injection $\mathcal{D}_{per}(Y_o) \rightarrow H^1_{oper}(Y_o)$ on a

$$H^{-1}_{per}(Y_o) \subset \mathcal{D}'_{per}(Y_o)$$

c'est-à-dire que $H^{-1}_{per}(Y_o)$ s'identifie à un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'_{per}(Y_o)$. Le résultat suivant (analogue de (4.4), sect. II) donne une caractérisation des éléments de $H^{-1}_{per}(Y_o)$.

<u>Proposition 7.6.</u> : Une distribution $u \in \mathcal{D}'_{per}(Y_o)$ est (prolongeable en) un élément de $H^{-1}_{per}(Y_o)$, si et seulement si, elle est de la forme (non unique)

(7.28) $$u = u_o + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial y_i} \; ; \; u_i \in L^2(Y_o) \; , \; 0 \le i \le n \; .$$

($\frac{\partial u_i}{\partial y_i}$ étant évidemment compris au sens de $\mathcal{D}'_{per}(Y_o)$). □

On a aussi (résultat qui se démontre exactement comme le point (4.3) de la sect. II)

(7.29) $\mathcal{D}_{per}(Y_o)$ est dense dans $H^{-1}_{per}(Y_o)$. □

L'étude de problèmes aux limites (dans l'ouvert Ω_o) du type Stokes périodique constitue l'un des objectifs essentiels de ce travail. A cette fin, nous allons établir deux résultats analogues à la Proposition 1.2. (chap. I) de R. Témam [1], pp. 14-15.

Démontrons d'abord le Lemme qui suit : Posons (cf. § 6 pour la définition de ${}^t\bar{\omega}$ ${}^t\bar{\bar{R}}_o$, ${}^tP_o\,{}^t\theta_o$)

(7.30) $$H^{-1}_{loc}(\Omega_o, Y) = {}^t\bar{\omega}\;{}^t\bar{\bar{R}}_o\;(H^{-1}_{per}(Y_o))$$

(7.31) $H^{-1}_{loc}(\Omega_o)$ = ensemble des $U \in \mathcal{D}'(\Omega_o)$, tels que $U|_{\mathcal{O}} \in H^{-1}(\mathcal{O})$ pour tout ouvert borné $\mathcal{O} \subset \Omega_o$.

où $H^{-1}(\mathcal{O})$ désigne le dual de l'espace $H^1_o(\mathcal{O})$ (= adhérence dans $H^1(\mathcal{O})$ de l'ensemble $\mathcal{D}(\mathcal{O})$).
On a le lemme suivant ($Q(\Omega_o)$ est défini au § 2) :

<u>Lemme 7.2.</u> : On a l'égalité

(7.32) $$H^{-1}_{loc}(\Omega_o, Y) = H^{-1}_{loc}(\Omega_o) \cap Q(\Omega_o).$$

<u>Démonstration</u> : Montrons d'abord que l'ensemble à droite de (7.32) est contenu dans celui à gauche : soit $U \in H^{-1}_{loc}(\Omega_o) \cap Q(\Omega_o)$. Posons $u = {}^tP_o\,{}^t\theta_o\,U$.
On a $U = {}^t\bar{\omega}\;{}^t\bar{\bar{R}}_o\,u$, $u \in \mathcal{D}'_{per}(Y_o)$. Nous devons montrer que $u \in H^{-1}_{per}(Y_o)$ (cf. (7.30)), c'est-à-dire qu'il existe une constante $c > 0$ telle qu'on ait

(7.33) $$|\langle u, \psi\rangle| \le c\|\psi\|_{H^1(Y_o)} \quad , \; \forall\, \psi \in \mathcal{D}_{per}(Y_o)$$

Pour $\psi \in \mathcal{D}_{per}(Y_o)$, on a, par définition (de ${}^tP_o\,{}^t\theta_o$)

$$<u,\psi> = <U, \theta_o P_o\psi>$$

où l'on rappelle que $\theta_o \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}_o)$ (avec $\bar{\omega}\theta_o = 1$), et donc

(7.34) $\quad$ supp $\theta_o \subset \mathcal{O}$,où $\mathcal{O}$ est un ouvert borné de Ω_o .

Notant que $U|_{\mathcal{O}} \in H^{-1}(\mathcal{O})$ (cf. (7.31)), et que, grâce à (7.34), $\theta_o P_o\psi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ (remarquons qu'on avait déjà $\theta_o P_o\psi \in \mathcal{D}(\Omega_o)$, car $\theta_o \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}_o)$ et $P_o\psi \in \mathcal{F}_{per}(\Omega_o) \subset \mathcal{F}(\Omega_o)$; cf. § 4, et cf. notamment Lemme 4.1), on a aussitôt

$$(7.35) \qquad |<u, \psi>| = |<U, \theta_o P_o\psi>| \le c_1 \; ||\theta_o P_o\psi||_{H^1(\mathcal{O})}$$

où $c_1 > 0$ (indépendant de $\theta_o P_o\psi$).

En utilisant la formule $\frac{\partial}{\partial y_j}(\theta_o P_o\psi) = \theta_o . \frac{\partial(P_o\psi)}{\partial y_j} + (P_o\psi) . \frac{\partial\theta_o}{\partial y_j}$, et en effectuant des majorations élémentaires, on déduit de (7.35) que

$$|<u,\psi>| \le c_2 \Big(\int_{\mathcal{O}} (|\theta|^2 + \sum_{j=1}^{n} |\frac{\partial\theta_o}{\partial y_j}|^2)(|P_o\psi|^2 + \sum_{j=1}^{n} |\frac{\partial}{\partial y_j}(P_o\psi)|^2) dy \Big)^{1/2}$$

où $c_2 > 0$ est une constante ne dépendant que de c_1 et de n.

Mais $|\theta_o(y)|^2 + \sum_{j=1}^{n} |\frac{\partial\theta_o}{\partial y_j}(y)|^2 \le \sup_{y \in \bar{\mathcal{O}}} (|\theta(y)|^2 + \sum_{j=1}^{n} |\frac{\partial\theta}{\partial y_j}(y)|^2)$, $\forall y$

où $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\theta|_{\Omega_o} = \theta_o$; $\bar{\mathcal{O}}$ (compact) = adhérence de $\mathcal{O}$.

De sorte qu'on a finalement

$$(7.36) \qquad |<u,\psi>| \le c_3 \Big(\int_{\mathcal{O}} |P_o\psi|^2 dy + \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathcal{O}} |\frac{\partial}{\partial y_j}(P_o\psi)|^2 dy \Big)^{1/2}$$

où $c_3 > 0$ ne dépend pas de ψ .

La propriété (7.33) se déduit alors de (7.36) en remarquant que $\mathcal{O} \subset$ {réunion finie de translatées de $\overset{-o-}{Y_o}$ } (cf. point (1.22) du n° I), puis en utilisant la Y-périodicité de $P_o\psi$, et la relation $\frac{\partial}{\partial y_j} P_o\psi = P_o \frac{\partial\psi}{\partial y_j}$.

Ceci montre que $u \in H^{-1}_{per}(Y_o)$, donc $U \in H^{-1}_{loc}(\Omega_o, Y)$. Par conséquent l'ensemble à droite de (7.32) est contenu dans celui à gauche.

Montrons maintenant que $H^{-1}_{loc}(\Omega_o, Y)$ est contenu dans l'ensemble à droite de (7.32) : soit $U \in H^{-1}_{loc}(\Omega_o, Y)$. Alors $U = {}^t\bar{\omega}\ {}^t\overset{-o-}{R_o}\, u$, où $u \in H^{-1}_{per}(Y_o)$.

On a (cf. (7.28)) $u = u_o + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial y_i}$, $u_i \in L^2(Y_o)$ $(0 \le i \le n)$. Donc

(7.37) $$U = U_o + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U_i}{\partial y_i}\ ;\ U_i \in L^2_{loc}(\Omega_o, Y),\ U_i = {}^t\bar{\omega}\ {}^t\overset{-o-}{R_o}\, u_i \quad (0 \le i \le n).$$

Si alors $\mathcal{O}$ est un ouvert borné de Ω_o, on a (en partant de (7.37))

$$U|_{\mathcal{O}} = V_o + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_i}{\partial y_i}\ ,\quad V_i \in L^2(\mathcal{O})$$

avec $V_i = U_i|_{\mathcal{O}}$. Donc $U|_{\mathcal{O}} \in H^{-1}(\mathcal{O})$, et cela pour tout ouvert borné $\mathcal{O} \subset \Omega_o$. Par définition ((7.31)) cela équivaut à $U \in H^{-1}_{loc}(\Omega_o)$. Or $U \in \mathcal{Q}(\Omega_o)$ (cf. (7.30)), d'où le résultat. Ceci démontre complètement le Lemme 7.2.

Nous aurons aussi besoin du Lemme suivant :

Lemme 7.3. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert borné tel que

(7.38) $$Y_o \subset \mathcal{O} \subset \Omega_o .$$

Alors, il existe une constante $c(\mathcal{O}) > 0$ telle que l'on ait

(7.39) $$\|U|_{\mathcal{O}}\|_{H^{-1}(\mathcal{O})} \le c(\mathcal{O})\ \|{}^tP_o\, {}^t\theta_o U\|_{H^{-1}_{per}(Y_o)}\ ,\ \forall U \in H^{-1}_{loc}(\Omega_o, Y_o)\ .$$

Preuve : Soit $\mathcal{O}$ un ouvert borné vérifiant (7.38), et soit $U \in H^{-1}_{loc}(\Omega_o, Y_o)$. Posons $u = {}^tP_o\, {}^t\theta_o U$. On a alors $u \in H^{-1}_{per}(Y_o)$, et $U = {}^t\bar{\omega}\ {}^t\overset{-o-}{R_o}\, u$. D'après l'égalité (7.32) et le fait que

$$\langle U,\phi\rangle = \langle u, \overset{-o-}{R}\ \bar{\omega}\ \phi\rangle\ ,\ \forall\phi \in \mathcal{D}(\Omega_o)\ ,$$

on a

$$\|U|_{\mathcal{O}}\|_{H^{-1}(\mathcal{O})} = \sup_{0 \ne \phi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})} \frac{\langle U, \phi\rangle}{\|\phi\|_{H^1(\mathcal{O})}}$$

$$= \sup_{0 \ne \phi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})} \frac{|\langle u, \overset{-o-}{R_o}\ \bar{\omega}\ \phi\rangle|}{\|\phi\|_{H^1(\mathcal{O})}}\ .$$

Mais on a (grâce à une inégalité analogue à (3.9), sect. II)

$$\| \overset{-o-}{R_o} \bar{\omega}\phi \|_{H^1(Y_o)} \leq c(\mathcal{O}) \|\phi\|_{H^1(\mathcal{O})} \quad , \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$$

où $c(\mathcal{O})$ est une constante positive ne dépendant que de $\mathcal{O}$. Donc

$$\| U |_{\mathcal{O}} \|_{H^{-1}(\mathcal{O})} \leq c(\mathcal{O}) \sup_{0 \neq \phi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})} \frac{|< u, \overset{-o-}{R_o} \bar{\omega} \phi >|}{\| \overset{-o-}{R_o} \bar{\omega} \phi \|_{H^1(Y_o)}}$$

On en déduit alors l'inégalité (7.39) en utilisant le fait que

$$\|u\|_{H^{-1}_{per}(Y_o)} = \sup_{0 \neq \psi \in \mathcal{D}_{per}(Y_o)} \frac{|< u, \psi >|}{\| \psi \|_{H^1(Y_o)}}$$

$$= \sup_{0 \neq \phi \in \mathcal{D}(\Omega_o)} \frac{|< u, \overset{-o-}{R_o} \bar{\omega} \phi >|}{\| \overset{-o-}{R_o} \bar{\omega} \phi \|_{H^1(Y_o)}}$$

$$\geq \sup_{0 \neq \phi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})} \frac{|< u, \overset{-o-}{R_o} \bar{\omega} \phi >|}{\| \overset{-o-}{R_o} \bar{\omega}\phi \|_{H^1(Y_o)}} .$$

Ce qui achève la démonstration. □

Etablissons maintenant la

<u>Proposition 7.7.</u> Soit $p \in \mathcal{D}'_{per}(Y_o)$ tel que

$$(7.40) \qquad \frac{\partial p}{\partial y_i} \in L^2(Y_o) \quad \text{(au sens de } \mathcal{D}'_{per}(Y_o)) \quad \forall\, i \leq i \leq n .$$

Alors, $p \in L^2(Y_o)$, et on a

$$(7.41) \qquad \|p\|_{L^2(Y_o)/\mathbb{R}} \leq c_o \| \text{grad } p \|_{(L^2(Y_o))^n} , \; c_o = \text{constante} > 0$$

indépendante de p.

<u>Remarque 7.3.</u> : Dans la Proposition 7.7 on note de façon générale

$$\text{grad } u = \{\frac{\partial u}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial y_n}\} \quad , \quad u \in \mathcal{D}'_{per}(Y_o).$$

$L^2(Y_o)/\mathbb{R}$ désigne l'espace quotient de $L^2(Y_o)$ par $\mathbb{R}$, que l'on peut identifier (cela est loisible) à

$$L^2(Y_o)/\mathbb{R} = \{ p \in L^2(Y_o) \ ; \ \int_{Y_o} p \, dy = 0\} \ . \ \square$$

<u>Preuve de la Proposition 7.7.</u> : Soit $p \in \mathcal{D}'_{per}(Y_o)$ et satisfaisant à (7.40).

Soit $P \in Q(\Omega_o)$, $P = {}^t\!\underset{\omega}{-}\,{}^t\!\underset{R_o}{\overset{o}{-}}\, p$. Alors (cf. (6.14)) $\frac{\partial P}{\partial y_i} = {}^t\!\underset{\omega}{-}\,{}^t\!\underset{R_o}{\overset{o}{-}} \frac{\partial p}{\partial y_i}$

($\frac{\partial P}{\partial y_i}$ est la dérivée partielle au sens de $\mathcal{D}'(\Omega_o)$), donc $\frac{\partial P}{\partial y_i} \in L^2_{loc}(\Omega_o)$, $\forall\ 1 \leq i \leq n$.

Utilisant alors la propriété (i) de la Proposition 1.2 (pp. 14, 15) de R. Témam [1] , on en déduit que $P \in L^2_{loc}(\Omega_o)$, avec évidemment P Y-périodique, i.e. $P \in L^2_{loc}(\Omega_o, Y_o)$. Donc $p \in L^2(Y_o)$. L'inégalité (7.41) s'obtient facilement en se restreignant à un ouvert borné $\mathcal{O}$, suffisamment régulier, avec $Y_o \subset \mathcal{O} \subset \Omega_o$, et en utilisant une inégalité analogue (cf. Proposition 1.2 précédente de R. Témam [1]) associée à $\mathcal{O}$ (notons que l'on a ici $p = P|_{Y_o}$).$\square$

On aura besoin du résultat suivant :

<u>Proposition 7.8.</u> : Soit $p \in \mathcal{D}'_{per}(Y_o)$ tel que

(7.42) $\frac{\partial p}{\partial y_i} \in H^{-1}_{per}(Y_o)$ (au sens de $\mathcal{D}'_{per}(Y_o)$) $\forall\ 1 \leq i \leq n$

Alors $p \in L^2(Y_o)$, et on a

(7.43) $\| p \|_{L^2(Y_o)/\mathbb{R}} \leq c_o \ \| \text{grad } p \|_{(H^{-1}_{per}(Y_o))^n}$

où c_o est une constante positive ne dépendant pas de p.

<u>Preuve</u> : Soit $p \in \mathcal{D}'_{per}(Y_o)$, et soit $P \in \mathcal{D}(\Omega_o)$, $P = {}^t\!\underset{\omega}{-}\,{}^t\!\underset{R_o}{\overset{o}{-}}\, p$. D'après la propriété (7.42), on a $\frac{\partial P}{\partial y_i} \in H^{-1}_{loc}(\Omega_o, Y_o)$ $\forall\ 1 \leq i \leq n$.

En utilisant l'identité (7.32) et d'autre part, le point (ii) de la Proposition 1.2 de R. Témam [1], on obtient $P \in L^2_{loc}(\Omega_o)$. On en déduit alors que $p \in L^2(Y_o)$. Reste à établir le point (7.43) : soit $\mathcal{O}$ un ouvert borné et suffisamment régulier tel que

$$Y_o \subset \mathcal{O} \subset \Omega_o .$$

On a (cf. R. Témam [1] , point (ii) de la Proposition 1.2, pp. 14, 15)

$$(7.44) \qquad \| P \|_{L^2(\mathcal{O}) / \mathbb{R}} \leq c_1(\mathcal{O}) \, \| \operatorname{grad} P|_{\mathcal{O}} \|_{(H^{-1}(\mathcal{O}))^n}$$

où $c_1(\mathcal{O}) > 0$ ne dépend que de $\mathcal{O}$.

Comme $P|_{Y_o} = p$ (cf. Proposition 7.1) et que $Y_o \subset \mathcal{O}$, on voit facilement que le premier membre de (7.44) est minoré par $\| p \|_{L^2(Y_o)/\mathbb{R}}$.

En posant maintenant $U = \frac{\partial P}{\partial y_i}$ (dérivée au sens de $\mathcal{D}'(\Omega_o)$) pour i fixé ($1 \leq i \leq n$), et appliquant la propriété (7.39) du Lemme 7.3 (noter que $\mathcal{O}$ satisfait à la condition (7.38)) on obtient

$$\| \frac{\partial P}{\partial y_i}|_{\mathcal{O}} \|_{H^1(\mathcal{O})} \leq c(\mathcal{O}) \, \| \frac{\partial p}{\partial y_i} \|_{H^{-1}_{per}(Y_o)} \qquad \forall \; 1 \leq i \leq n$$

(en effet $\frac{\partial p}{\partial y_i} = {}^tP_o \, {}^t\theta_o \frac{\partial P}{\partial y_i}$)

d'où

$$\| p \|_{L^2(Y_o)/\mathbb{R}} \leq c_o \, \| \operatorname{grad} p \|_{(H^{-1}_{per}(Y_o))^n} \quad , \; c_o > 0 \; .$$

Ceci achève la démonstration de la Proposition 7.8. □

8. APPLICATION

8.1. Orientation et notations

L'objet de cette partie de notre travail est de rassembler les éléments utiles à l'étude d'un problème périodique du type Stokes non homogène dans Ω_o (ou, d'après l'isomorphisme $\mathcal{D}'_{per}(Y_o) \simeq \mathcal{Q}(\Omega_o)$, dans Y_o, cf. (SP) dans "Motivations physiques"). Il s'agit notamment de définir l'analogue de l'espace $V = \{u \in \underline{H}^1_o(\Omega) \; ; \; \operatorname{div} u = 0\}$ (cf. R. Témam[1]), et d'en étudier les propriétés. Cela nous conduit à rechercher une caractérisation des $f = \{f_i\}$, $f_i \in \mathcal{D}'_{per}(Y_o)$ ($1 \leq i \leq n$) tels que $f = \operatorname{grad} p$, $p \in \mathcal{D}'_{per}(Y_o)$ (grad p étant évidemment compris au sens de $\mathcal{D}'_{per}(Y_o)$). Nous procéderons par étapes successives, chaque étape constituant d'ailleurs un résultat intéressant en soi.

Nous identifierons toute fonction $\psi \in \mathcal{D}_{per}(Y_o)$ à son prolongement par zéro à $\bar{Y}$ (l'adhérence de la période Y). On peut voir sans difficulté que cette identification est loisible, $\mathcal{D}_{per}(Y_o)$ pouvant être défini comme l'ensemble des $\psi \in \mathcal{D}_{per}(\bar{Y})$ (cf. § 1 de la sect. II) à support (compact) dans l'ensemble $\overset{-o-}{Y_o}$ (défini au § 1 de la sect. I).

Les notations et les hypothèses des § 7 et précédents sont conservées. Dans ce paragraphe on a n = 3.

On introduit le point $a = (a_1,a_2,a_3)$ tel que $Y =]0,a_1[\times]0,a_2[\times]0,a_3[$, et les différentes faces opposées $\pi(y_i=0)$, $\pi(y_i=a_i)$ de Y (cf. § 1, sect. I).

On posera

(8.1) $\bar{\pi}(y_i=0)$ = adhérence de $\pi(y_i=0)$ dans le plan d'équation $y_i=0$ ($\bar{\pi}(y_i=0)$ n'est rien d'autre que l'intersection de $\bar{Y}$ et de ce plan).

On notera

(8.2) $y' = (y_2,y_3)$ l'élément générique du plan $y_1=0$

(8.3) π_i l'opérateur de projection orthogonale sur le plan $y_i=0$ (donc, si $y = (y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3$, on a $y = (y_1,y')$, où $y' = \pi_1 y$)

(8.4) $\pi_i \overset{-o-}{Y_o}$ la projection orthogonale de $\overset{-o-}{Y_o}$ sur le plan $y_i=0$.

On a évidemment $\pi_i \overset{-o-}{Y_o} \subset \bar{\pi}(y_i=0)$, et l'ensemble $\pi_i \overset{-o-}{Y_o}$ est compatible avec la périodicité (définition analogue à (5.3)).

Enfin, on impose à Y_o les conditions supplémentaires suivantes :

(8.5) Y_o est formé de trois tubes cylindriques dans les directions des axes de coordonnées, d'intersection non vide et suffisamment régulière.

Il existe des constantes α_i, β_i, avec $0 < \alpha_i < \beta_i < a_i$ $(1 \le i \le 3)$ telles qu'on ait

(8.6) $$]\alpha_1, \beta_1[\times \pi_1 \overset{-o-}{Y_o} \subset \overset{-o-}{Y_o}$$

et des relations analogues pour i = 2,3.

Afin que les conditions (1.18) (cf. sect. I) et (8.5) coexistent, on doit considérer des cylindres à surface latérale suffisamment régulière. Après avoir disposé les tubes cylindriques suivant (8.5) (le schéma le plus simple est celui où les centres de gravité des trois cylindres sont confondus avec le centre de gravité de Y), on supprime les "coins" résultant de l'assemblage en effectuant un "polissage" de leur intersection. Cela s'exprime dans (8.5) par la condition : "d'intersection suffisamment régulière".

La condition (8.6) joue un rôle fondamental dans la suite de ce travail (cf. n° 8.2). Si l'on considère dans (8.5) des parallélépipèdes dont on a préalablement "arrondi" les arrêtes (pour fixer les idées, nous baserons l'étude qui suit sur ce cas de figure ; voir figure page 1), on peut voir aisément que la condition (8.6) est satisfaite. Il existe d'autres schémas géométriques Y_o pour lesquels la condition (8.6) est satisfaite. Notons toutefois que l'ouvert Y_o ne vérifie pas (8.6) s'il est formé de cylindres à section circulaire. □

8.2. Calcul de primitives dans $\mathcal{D}'_{per}(Y_o)$

Définissons :

(8.7) $\mathcal{D}_{per}(\bar{\pi}(y_1=0)) = \{ \phi | \phi$ définie et de classe C^∞ sur $\bar{\pi}(y_1=0)$, $D^\alpha \phi$ $\pi(y=0)$-périodique pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^2 \}$

où

(8.8) "$D^\alpha\phi$ est $\pi(y_1=0)$-périodique" signifie que $D^\alpha\phi$ prend des valeurs égales sur les côtés opposés du rectangle $\pi(y_1=0)$ (cf. (8.1) pour la définition de $\bar{\pi}(y_1=0)$).

D'après le § 1 de la section II (voir le n° 1.3 pour n = 2) $\mathcal{D}_{per}(\bar{\pi}(y_1=0))$ est un espace de Fréchet, sa topologie pouvant être définie à l'aide des semi-normes

(8.9) $$p_{\bar{\pi}(y_1=0),m}(\phi) = \sup_{\substack{y \in \bar{\pi}(y_1=0) \\ |\alpha| \leq m}} |D^\alpha \phi(y)| \quad , \quad m \in \mathbb{N} .$$

Démontrons le

<u>Lemme 8.1.</u> : Pour tout $\psi \in \mathcal{D}_{per}(Y_o)$, on définit $\lambda_1\psi$ par

(8.10) $$\lambda_1\psi(y') = \int_0^{a_1} \psi(t,y')dt, \quad y' = (y_2,y_3)$$

Alors on a

$$\lambda_1\psi \in \mathcal{D}_{per}(\bar{\pi}(y_1=0)), \quad \lambda_1\psi \text{ à support compact dans } \pi_1 \overset{o}{\bar{Y}}_o .$$

En outre, l'application

(8.11) $$\psi \to \lambda_1\psi$$

est continue de $\mathcal{D}_{per}(Y_o)$ dans $\mathcal{D}_{per}(\bar{\pi}(y_1=0))$.

<u>Preuve</u> : Soit $\psi \in \mathcal{D}_{per}(Y_o)$. On vérifie facilement que $\lambda_1\psi \in \mathcal{D}_{per}(\bar{\pi}(y_1=0))$.
Montrons que $\lambda_1\psi$ est à support compact dans $\pi_1 \overset{o}{\bar{Y}}_o$ (cf. (8.4)) :

Soit (cet ensemble est compact, et son intérieur vérifie les conditions (8.5), (8.6))

(8.12) $\bar{Y}_{o\varepsilon} = \{y \in \overset{o}{\bar{Y}}_o \; ; \; d(y,\gamma) \geq \varepsilon\} \; , \; \varepsilon > 0$

tel que supp $\psi \subset \bar{Y}_{o\varepsilon}$ (cf. le n° 6.1 pour la construction de l'espace vectoriel topologique $\mathcal{D}_{per}(Y_o)$). Définissons $\pi_1 \bar{Y}_{o\varepsilon}$ comme au point (8.4), et

(8.13) $Z_{o\varepsilon}$ = complémentaire de $\pi_1 \bar{Y}_{o\varepsilon}$ dans l'ensemble $\bar{\pi}(y_1=0)$.

L'ensemble $\pi_1 \bar{Y}_{o\varepsilon}$ est compact, et on a $\pi_1 \bar{Y}_{o\varepsilon} \subset \pi_1 \overset{o}{\bar{Y}}_o$.

Pour tout $y' = (y_2,y_3)$, nous noterons

(8.14) Δ_1' la droite parallèle à l'axe des y_1 et passant par le point $(0,y')$.

Faisons alors la remarque simple (mais utile) suivante :

(8.15) un point y' est dans $\pi_1 \bar{Y}_{o\varepsilon}$ si, et seulement si, la droite Δ_1' correspondante (cf. (8.14)) rencontre $\bar{Y}_{o\varepsilon}$.

Soit alors $y' \in Z_{o\varepsilon}$ ((8.13)), et soit Δ_1' définie par (8.14). Alors (cf. (8.15)) $\bar{Y}_{o\varepsilon} \cap \Delta_1' = \emptyset$ (ensemble vide) ; comme supp $\psi \subset \bar{Y}_{o\varepsilon}$, on a $\psi(y) = 0 \;\; \forall y \in \Delta_1'$.

Mais alors $\displaystyle\int_0^{a_1} \psi(t,y')dt = \int_{\Delta_1'} \psi \, ds$, ds étant la mesure linéique induite par dy ; il en résulte que $(\lambda_1\psi)(y') = 0$ pour tout $y' \in Z_{o\varepsilon}$,c'est-à-dire que le support de $\lambda_1\psi$ est contenu dans $\pi_1 \bar{Y}_{o\varepsilon}$ (compact)$\subset \pi_1 \overset{o}{\bar{Y}}_o$.

Montrons enfin que l'application linéaire λ_1 (8.11) est continue : pour tout compact de la forme (8.12), on pose (cf. § 6)

(8.16) $\mathcal{D}_{per,\varepsilon}(Y_o) = \{\psi \in \mathcal{D}_{per}(Y_o) \; ; \; \text{supp } \psi \subset \bar{Y}_{o\varepsilon}\}$.

On doit montrer que la restriction de λ_1 à tout $\mathcal{D}_{per,\varepsilon}(Y_o)$ est continue. Soit donc $\psi \in \mathcal{D}_{per,\varepsilon}(Y_o)$ (pour $\varepsilon > 0$ fixé). Posons $\phi_1 = \lambda_1\psi$. Pour $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$, notons $\alpha' = (0, \alpha_1, \alpha_2)$. D'après (8.10) on a

$$D^\alpha \phi_1(y') = \int_0^{a_1} D^{\alpha'} \psi(t,y')dt, \text{ donc } |D^\alpha \phi_1(y')| \le a_1 \sup_{y_1 \in [0,a_1]} |D^{\alpha'} \psi(y_1,y')|$$

d'où $\sup_{y' \in \bar{\pi}(y_1=0)} |D^\alpha \phi_1 y')| \le a_1 \sup_{y \in \bar{Y}} |D^{\alpha'} \psi(y)|$. Notant que $\psi = 0$ hors de $\bar{Y}_{o\varepsilon}$, on voit alors que pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a

$$p_{\bar{\pi}(y_1=0),m}(\lambda_1 \psi) \le a_1 \, p_{\bar{Y}_{o\varepsilon},m}(\psi) \quad \forall \psi \in \mathcal{D}_{per,\varepsilon}(Y_o)$$

d'où l'on déduit la continuité de λ_1. Ceci achève la démonstration du Lemme 8.1. □

Nous aurons aussi besoin du résultat suivant :

<u>Lemme 8.2.</u> : Soit $\chi \in \mathcal{D}_{per}(Y_o)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) la fonction χ vérifie

(8.17) $$\int_0^{a_1} \chi(t,y')dt = 0 \qquad \forall y'.$$

(ii) il existe $\psi \in \mathcal{D}_{per}(Y_o)$ tel que

(8.18) $$\frac{\partial \psi}{\partial y_1} = \chi$$

<u>Démonstration</u> : L'implication (ii) $\rightarrow$ (i) est évidente. Démontrons que (i) $\rightarrow$ (ii) :

Soit $\chi \in \mathcal{D}_{per}(Y_o)$, et vérifiant (8.17). Définissons

(8.19) $$\psi(y_1,y') = \int_0^{y_1} \chi(t,y')dt \qquad (0 \le y_1 \le a_1) .$$

On vérifie facilement que $\psi \in \mathcal{D}_{per}(\bar{Y})$ et que (8.18) est satisfait. Reste à montrer que $\psi \in \mathcal{D}_{per}(Y_o)$: Soit $\bar{Y}_{o\varepsilon}$ un compact de la forme (8.12) tel que supp $\chi \subset \bar{Y}_{o\varepsilon}$. Posons

(8.20) $$C\,\bar{Y}_{o\varepsilon} = \text{complémentaire de } \bar{Y}_{o\varepsilon} \text{ dans } \bar{Y}$$

(8.21) $$\phi_\varepsilon = \psi|_{C\,\bar{Y}_{o\varepsilon}} = \text{restriction de } \psi \text{ à } C\,\bar{Y}_{o\varepsilon} .$$

Comme $\chi = 0$ sur l'ensemble $C\,\bar{Y}_{o\varepsilon}$, la fonction ψ_ε ne dépend pas de la variable y_1. Soit alors $\overset{o}{y} = (\overset{o}{y}_1, \overset{o}{y}') \in C\,\bar{Y}_{o\varepsilon}$ un point arbitraire donné. Associons à $\overset{o}{y}'$ la droite Δ_1' définie par (8.14). On a évidemment $\overset{o}{y} \in \Delta_1'$. Donc, nécessairement, $(0, \overset{o}{y}') \notin \bar{Y}_{o\varepsilon}$ (grâce à la structure géométrique de $\bar{Y}_{o\varepsilon}$; cf. (8.5)). Par conséquent $(0, \overset{o}{y}')$ et $\overset{o}{y}$ sont dans $\Delta_1' \cap C\,\bar{Y}_{o\varepsilon}$. La fonction ψ_ε ne dépendant que des variables $y' = (y_2, y_3)$, on a $\psi_\varepsilon(0, \overset{o}{y}') = \psi_\varepsilon(\overset{o}{y})$, $\overset{o}{y} \in C\,\bar{Y}_{o\varepsilon}$; ce qui montre que $\psi(0,y') = \psi(y_1, y')\ \forall\, y = (y_1, y') \in C\,\bar{Y}_{o\varepsilon}$ d'où (puisque $\psi(0,y') = 0\ \forall y'$) $\psi(y) = 0\ \forall y \in C\,\bar{Y}_{o\varepsilon}$. Donc les fonctions

(8.22) χ et ψ ((8.19) sont toutes deux à support dans le compact $\bar{Y}_{o\varepsilon} \subset \overset{-o-}{Y_o}$ ce qui achève la démonstration. □

Nous allons maintenant pouvoir étudier l'existence de primitives (partielles) dans $\mathcal{D}'_{per}(Y_o)$. Nous chercherons les primitives par rapport à la variable y_1, les autres primitives se calculant suivant une démarche analogue.

Définissons

(8.23) $$\mathcal{C}_1(Y_o) = \{\phi \in \mathcal{D}_{per}(Y_o)\ ;\ \frac{\partial\phi}{\partial y_1} = 0\}$$

(8.24) $$\mathcal{M}_1(Y_o) = \{\chi \in \mathcal{D}_{per}(Y_o)\ ;\ \int_0^{a_1} \chi(t,y')dt = 0 \quad \forall y'\}$$

(où $y' = (y_2, y_3) \in \bar{\pi}(y_1=0)$; cf. (8.1), (8.2)).

D'après la continuité (évidente !) de l'application $\frac{\partial}{\partial y_1}$ sur $\mathcal{D}_{per}(Y_o)$, et celle de l'application λ_1 (Lemme 8.1), les espaces $\mathcal{C}_1(Y_o)$ et $\mathcal{M}_1(Y_o)$ sont fermés dans $\mathcal{D}_{per}(Y_o)$.

Démontrons le

<u>Théorème 8.1.</u> : Soit $S_1 \in \mathcal{D}'_{per}(Y_o)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe $T \in \mathcal{D}'_{per}(Y_o)$ tel que

(8.25) $$S_1 = \frac{\partial T}{\partial y_1} \quad \text{(au sens de } \mathcal{D}'_{per}(Y_o))$$

(ii) la distribution S_1 vérifie la condition

(8.26) $$\langle S_1, \phi\rangle = 0 \quad \forall\phi \in \mathcal{C}_1(Y_o)\ .$$

Lorsque la condition (8.26) est vérifiée par S_1, l'équation (8.25) (par rapport à la distribution inconnue T) admet une infinité de solutions ; deux d'entre elles diffèrent d'une distribution arbitraire "indépendante de y_1".

Remarque 8.2. : Nous appelons (avec L. Schwartz [1] , p. 55 ; l'analogie est évidente) distribution (dans $\mathcal{D}'_{per}(Y_o)$) indépendante de y_1, toute distribution $T \in \mathcal{D}'_{per}(Y_o)$ telle que

(8.27) $$\frac{\partial T}{\partial y_1} = 0 \quad \text{(au sens de } \mathcal{D}'_{per}(Y_o)). \quad \square$$

Démonstration du Théorème 8.1. : Il est évident que (i) $\rightarrow$ (ii). Montrons que, inversement, (ii) implique (i) :

a) Introduisons l'espace $\mathcal{M}_1(Y_o)$. D'après le Lemme 8.2, $\mathcal{M}_1(Y_o)$ est le sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{D}_{per}(Y_o)$ constitué par les fonctions admettant dans $\mathcal{D}_{per}(Y_o)$ une primitive par rapport à y_1.

Définissons T_o par

(8.28) $$\langle T_o, \chi\rangle = - \langle S_1, \psi\rangle \quad , \quad \chi \in \mathcal{M}_1(Y_o)$$

où ψ est une primitive quelconque de χ , i.e. $\dfrac{\partial\psi}{\partial y_1} = \chi$.

Grâce à la condition (8.26), le premier membre de (8.28) ne dépend que de χ, de sorte que T_o est bien défini sur $\mathcal{M}_1(Y_o)$.
Montrons que T_o, forme linéaire définie sur $\mathcal{M}_1(Y_o)$, est continue sur $\mathcal{M}_1(Y_o)$ pour la topologie de $\mathcal{D}_{per}(Y_o)$: comme $S_1 \in \mathcal{D}'_{per}(Y_o)$ et que, pour $\chi \in \mathcal{M}_1(Y_o)$ donné, (8.28) ne dépend pas de la primitive choisie, il suffit de montrer que l'application linéaire $\chi \rightarrow \psi$ où ψ est donné par (8.19), est continue de $\mathcal{M}_1(Y_o)$ dans $\mathcal{D}_{per}(Y_o)$. Cela revient à montrer que la restriction à $\mathcal{M}_1(Y_o) \cap \mathcal{D}_{per,\varepsilon}(Y_o)$ de cette application est continue pour tout $\varepsilon > 0$ (l'espace $\mathcal{D}_{per,\varepsilon}(Y_o)$ étant défini au point (8.16)). Cette propriété se déduira aisément de la remarque suivante : soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}^3$. La formule (8.19) montre alors que

- si $\alpha_1 \geq 1$, on a $D^\alpha\psi(y) = D^{\alpha'}\chi(y)$, où $\alpha' = (\alpha_1-1, \alpha_2, \alpha_3)$

- si $\alpha_1 = 0$, on a $D^\alpha\psi(y) = \displaystyle\int_0^{y_1} D^\alpha\chi(t,y')dt$, d'où $|D^\alpha\psi(y)| \leq \displaystyle\int_0^{a_1} |D^\alpha\chi(t,y')|\, dt$
$$\leq a_1 \sup_{y\in\bar{Y}} |D^\alpha\chi(y)|.$$

Par conséquent (dans tous les cas), pour tout $m \in \mathbb{N}$ il existe $m' \in \mathbb{N}$ et $c > 0$ tels que

$$\sup_{\substack{y \in \bar{Y} \\ |\alpha| \le m}} |D^\alpha \psi(y)| \le c \sup_{\substack{y \in \bar{Y} \\ |\alpha| \le m'}} |D^\alpha \chi(y)| \qquad \forall \chi \in \mathcal{M}_1(Y_o).$$

Mais, si $\chi \in \mathcal{D}_{per,\varepsilon}(Y_o)$, i.e. supp $\chi \subset \bar{Y}_{o\varepsilon}$, alors (cf. (8.22)) on a supp $\psi \subset \bar{Y}_{o\varepsilon}$, d'où l'on déduit la continuité cherchée.

Par ailleurs, on vérifie facilement que

(8.29) $$< \frac{\partial T_o}{\partial y_1}, \chi > = < S_1, \chi > \qquad \chi \in \mathcal{M}_1(Y_o) .$$

b) Montrons que T_o se prolonge à $\mathcal{D}_{per}(Y_o)$ en un élément $T_1 \in \mathcal{D}'_{per}(Y_o)$, solution de (8.25) : Introduisons l'ensemble $\pi_1 \overset{-o-}{Y_o}$ ((8.4)), et considérons α_1, β_1 $(0 < \alpha_1 < \beta_1 < a_1)$ vérifiant la condition (8.6). Puis définissons

(8.30) $\xi_o \in \mathcal{D}(]0,a_1[)$ = ensemble des fonctions définies et de classe C^∞ sur $]0,a_1[$, à support compact dans $]0,a_1[$

(8.31) $$\text{supp } \xi_o \subset]\alpha_1, \beta_1[$$

(8.32) $$\int_0^{a_1} \xi_o(t)dt = 1.$$

Pour tout $\psi_1 \in \mathcal{D}_{per}(\bar{\pi}(y_1=0))$ (cf. (8.70)), on note

$\xi_o \otimes \psi_1$ le produit tensoriel de ξ_o et ψ_1, i.e. $(\xi_o \otimes \psi_1)(y_1,y') = \xi_o(y_1)\, \psi_1(y')$.

On a (propriété facile à démontrer)

(8.33) $$\text{supp}(\xi_o \otimes \psi_1) = \text{supp } \xi_o \times \text{supp } \psi_1 .$$

Par ailleurs, on a $\xi_o \otimes \psi_1 \in \mathcal{D}_{per}(\bar{Y})$ (vérification facile).

La relation (8.33) montre que, si $\psi_1 = \lambda_1 \psi$; $\psi \in \mathcal{D}_{per}(Y_o)$, λ_1 défini par (8.10), alors les propriétés (8.6) et (8.31) impliquent que la fonction $\xi_o \otimes \lambda_1 \psi$ est à support compact dans $\overset{-o-}{Y_o}$, i.e. $\xi_o \otimes \lambda_1 \psi \in \mathcal{D}_{per}(Y_o)$, $\forall \psi \in \mathcal{D}_{per}(Y_o)$.

En outre on vérifie facilement que l'application linéaire

$$(8.34) \qquad \psi \to \xi_o \otimes \lambda_1 \psi$$

est continue sur $\mathcal{D}_{per}(Y_o)$.

Définissons

$$\mathcal{N}_1(Y_o) = \{\phi \in \mathcal{D}_{per}(Y_o) \; ; \; \phi = \xi_o \otimes \lambda_1 \psi \; , \text{ où } \psi \in \mathcal{D}_{per}(Y_o)\}.$$

En remarquant que $\phi = \xi_o \otimes \lambda_1 \psi$ implique $\lambda_1 \phi = \lambda_1 \psi$ (on utilise (8.32)) on voit que l'espace vectoriel $\mathcal{N}_1(Y_o)$ est fermé dans $\mathcal{D}_{per}(Y_o)$, comme noyau de l'application linéaire continue (sur $\mathcal{D}_{per}(Y_o)$)

$$(8.35) \qquad \psi \to \mu_1 \psi = \psi - \xi_o \otimes \lambda_1 \psi$$

On vérifie facilement que $\mu_1 \psi \in \mathcal{M}_1(Y_o)$ ((8.24)) et que $\mathcal{M}_1(Y_o) \cap \mathcal{N}_1(Y_o) = \{0\}$.

De sorte que toute fonction $\psi \in \mathcal{D}_{per}(Y_o)$ se représente sous la forme unique

$$(8.36) \qquad \psi = \mu_1 \psi + \xi_o \otimes \lambda_1 \psi \; ; \; \mu_1 \psi \in \mathcal{M}_1(Y_o), \; \xi_o \otimes \lambda_1 \psi \in \mathcal{N}_1(Y_o).$$

La forme linéaire T_o étant donnée par (8.28), on définit alors T_1 par

$$(8.37) \qquad \langle T_1, \psi \rangle = \langle T_o, \mu_1 \psi \rangle \; , \; \psi \in \mathcal{D}_{per}(Y_o) \; .$$

On a aussitôt $T_1 \in \mathcal{D}'_{per}(Y_o)$, car elle est composée des applications linéaires continues μ_1 ((8.35)) de $\mathcal{D}_{per}(Y_o)$ dans $\mathcal{M}_1(Y_o)$, et T_o de $\mathcal{M}_1(Y_o)$ dans $\mathbb{C}$. En outre T_1 coïncide avec T_o sur $\mathcal{M}_1(Y_o)$, car $\mu_1 \chi = \chi$, $\chi \in \mathcal{M}_1(Y_o)$.

Enfin on vérifie facilement que $\langle \frac{\partial T_1}{\partial y_1}, \psi \rangle = \langle S_1, \psi \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{D}_{per}(Y_o)$, donc $\frac{\partial T_1}{\partial y_1} = S_1$; ceci démontre la première partie du Théorème 8.1.

c) Résolution effective de l'équation (8.25), sous l'hypothèse (8.26) : En utilisant la décomposition (8.36), et suivant L. Schwartz [1] (p. 57), on montre que les solutions de l'équation (8.25) sont de la forme

$$T = T_1 + \Sigma_1$$

où

$T_1 \in \mathcal{D}'_{per}(Y_o)$ est défini par (8.28), (8.37)

$\Sigma_1 \in \mathcal{D}'_{per}(Y_o)$ est une distribution arbitraire indépendante de y_1 (i.e. Σ_1 satisfait à (8.27)).

Remarque 8.3. : On obtient (plus facilement) pour $\mathcal{D}'_{per}(\bar{Y})$ un résultat analogue au Théorème 8.1. (il suffit de remplacer dans l'énoncé du Théorème 8.1 l'ensemble Y_o par $\bar{Y}$). La démonstration est presque identique à la précédente, avec toutefois une fonction $\xi_o \in \mathcal{D}_{per}([0,a_1])$, vérifiant (8.32) (la condition (8.31) étant supprimée). L'interprétation de ce résultat est la suivante :

Soit $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ une distribution périodique, i.e. $U \in \mathcal{Q}(T^n)$.
Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) U vérifie la condition

$$(8.38) \qquad \langle U,\phi\rangle = 0 \quad , \quad \forall\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad \bar{\omega}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y_1}\right) = 0$$

(ii) il existe $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, T périodique (i.e. $T \in \mathcal{Q}(T^n)$) tel que

$$(8.39) \qquad \frac{\partial T}{\partial y_1} = U .$$

Lorsque (8.38) est satisfait, l'équation (8.39) admet une infinité de solutions ; deux d'entre elles diffèrent d'une distribution arbitraire "indépendante de y_1". □

On introduit maintenant les espaces

$$(8.40) \qquad \mathcal{C}_i(Y_o) = \{\phi \in \mathcal{D}_{per}(Y_o) \; ; \; \frac{\partial\phi}{\partial y_i} = 0\} \quad , \quad 1 \le i \le 3 .$$

On a alors le résultat suivant :

Proposition 8.1. : Soit $S_i \in \mathcal{D}'_{per}(Y_o)$ $(1 \le i \le 3)$ un système vérifiant

$$(8.41) \qquad \langle S_i,\phi\rangle = 0 \quad , \quad \forall\phi \in \mathcal{C}_i(Y_o) \quad ; \quad 1 \le i \le 3.$$

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe $T \in \mathcal{D}'_{per}(Y_o)$ satisfaisant à

(8.42) $\quad S_i = \dfrac{\partial T}{\partial y_i}$ (au sens de $\mathcal{D}'_{per}(Y_o)$) $\forall i$, $1 \le i \le 3$

(ii) le système S_i $(1 \le i \le 3)$ satisfait à

(8.43) $\quad \dfrac{\partial S_i}{\partial y_j} - \dfrac{\partial S_j}{\partial y_i} = 0$, $\forall$ $1 \le i, j \le 3$.

Lorsque (8.41) et (8.43) sont vérifiés, T (solution de (8.42)) est unique à une distribution constante additive près.

Démonstration : Elle peut être calquée sur L. Schwartz [1] (p. 59). □

8.8. Applications du calcul de primitives.

On pose

$$\underline{\mathcal{D}}_{per}(Y_o) = (\mathcal{D}_{per}(Y_o))^3$$

$$\underline{\mathcal{D}}'_{per}(Y_o) = (\mathcal{D}'_{per}(Y_o))^3$$

$\underline{H}^1_{per}(Y_o) = (H^1_{per}(Y_o))^3$ ($H^1_{per}(Y_o)$ défini au point (7.10))

$\underline{H}^1_{oper}(Y_o) = (H^1_{oper}(Y_o))^3$ ($H^1_{oper}(Y_o)$ défini au point (7.19))

$\underline{H}^{-1}_{per}(Y_o) = (H^{-1}_{per}(Y_o))^3$ ($H^{-1}_{per}(Y_o)$ défini au point (7.27)).

Pour $f = \{f_i\} \in \underline{\mathcal{D}}'_{per}(Y_o)$, $\psi = \{\psi_i\} \in \underline{\mathcal{D}}_{per}(Y_o)$, on notera

$$< f, \psi > = \sum_i <f_i, \psi_i> \text{ (valeur de f au point } \psi \text{)}.$$

On munira $\underline{H}^1_{oper}(Y_o)$ de la norme hilbertienne

(8.44) $$\|u\|_{\underline{H}^1_{oper}(Y_o)} = \left(\sum_i \int_{Y_o} |\text{grad } u_i|^2 \, dy \right)^{1/2}, \quad u = \{u_i\} \in \underline{H}^1_{oper}(Y_o)$$

équivalente à la norme de $\underline{H}^1(Y_o)$. Le produit scalaire correspondant est noté

$$(u,v)_{\underline{H}^1_{oper}(Y_o)} \,.$$

On définit enfin

(8.45) $\mathcal{V}_{per}(Y_o) = \{\psi \in \mathcal{D}_{per}(Y_o) \; ; \; \operatorname{div} \psi = 0\}$

(8.46) $V_{per}(Y_o) = \{u \in \underline{H}^1_{oper}(Y_o) \; ; \; \operatorname{div} u = 0\}$.

($\operatorname{div} u = \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial y_i} (u \in \underline{H}^1_{per}(Y_o))$ étant compris indifféremment au sens de $\mathcal{D}'(Y_o)$ ou de $\mathcal{D}'_{per}(Y_o)$; cf. (7.9)).

$V_{per}(Y_o)$ (sous-espace vectoriel fermé de $\underline{H}^1_{oper}(Y_o)$) est un espace de Hilbert pour la norme (8.44). □

On a la

<u>Proposition 8.2.</u> : Soit $f \in \mathcal{D}'_{per}(Y_o)$, $f = \{f_i\}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe $p \in \mathcal{D}'_{per}(Y_o)$ tel que

(8.47) $f = \operatorname{grad} p$ (au sens de $\mathcal{D}'_{per}(Y_o)$)

(ii) le vecteur f vérifie la condition

(8.48) $\langle f,\psi\rangle = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{V}_{per}(Y_o)$.

Lorsque f satisfait à (8.48), la distribution p, dans (8.47), est unique à une distribution constante additive près.

<u>Démonstration</u> : L'implication (i) $\rightarrow$ (ii) est évidente. On va démontrer que la condition (ii) implique (i) : Pour tout α $(1 \leq \alpha \leq 3)$ introduisons le vecteur

(8.49) $\psi^{(\alpha)}$ de $\alpha^{\text{ième}}$ composante ϕ ; $\phi \in \mathcal{C}_\alpha(Y_o)$, ϕ arbitraire, les autres composantes étant nulles
(où les $\mathcal{C}_\alpha(Y_o)$ sont définis au point (8.40))
puis, pour tout $1 \leq \alpha, \beta \leq 3$, le vecteur

(8.50) $\psi^{(\alpha,\beta)}$ de $\alpha^{\text{ième}}$ composante $\frac{\partial \phi}{\partial y_\beta}$, de $\beta^{\text{ième}}$ composante $\frac{\partial \phi}{\partial y_\alpha}$;

$\phi \in \mathcal{D}_{per}(Y_o)$, ϕ arbitraire, l'autre composante étant nulle.

En prenant dans (8.48) les fonctions ψ de la forme (8.49) on obtient

(8.51) $\quad <f_\alpha, \phi> = 0 \;, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_\alpha(Y_o) \quad ; \quad \forall \alpha .$

Prenons maintenant dans (8.48) les fonctions ψ de la forme (8.50). On a

(8.52) $$\frac{\partial f_\alpha}{\partial y_\beta} - \frac{\partial f_\beta}{\partial y_\alpha} = 0 \;, \quad \forall \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq 3.$$

Les conditions (8.51), (8.52) montrent que la Proposition 8.1 peut s'appliquer au vecteur $f = \{f_i\}$; d'où la Proposition 8.2. □

Les espaces $\mathcal{V}_{per}(Y_o)$ et $V_{per}(Y_o)$ étant définis aux points (8.45), (8.46), on a la

Proposition 8.3. : $\mathcal{V}_{per}(Y_o)$ est dense dans l'espace $V_{per}(Y_o)$.

Démonstration : Il suffit de montrer que tout $u \in V_{per}(Y_o)$ orthogonal à $\mathcal{V}_{per}(Y_o)$ est nul : Soit donc $u \in V_{per}(Y_o)$ tel qu'on ait

$$(u, \psi)_{\underline{H}^1_{per}(Y_o)} = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{V}_{per}(Y_o).$$

Alors il vient aussitôt $<\Delta u, \psi> = 0$, $\forall \psi \in \mathcal{V}_{per}(Y_o)$ où $\Delta u = \{\Delta u_i\}$, Δu_i = laplacien de u_i au sens de $\mathcal{D}'_{per}(Y_o)$.

En utilisant la Proposition 8.2, on a $\Delta u = \text{grad } p$, $p \in \mathcal{D}'_{per}(Y_o)$ (p unique à une distribution constante additive près).

Mais $u \in \underline{H}^1_{per}(Y_o)$. Donc $\Delta u \in \underline{H}^{-1}_{per}(Y_o)$, de sorte qu'on a

$$\Delta u_i = \frac{\partial p}{\partial y_i} , \quad \Delta u_i \in H^{-1}_{per}(Y_o) \; ; \quad \forall i .$$

Par conséquent, d'après la Proposition 7.8, on a

$$\Delta u = \text{grad } p, \quad p \in L^2(Y_o)/\mathbb{R} .$$

On en déduit facilement que

$$(8.53) \qquad (u,\psi)_{\underline{H}^1_{oper}(Y_o)} = \int_{Y_o} p.\ \mathrm{div}\ \psi\ dy\ ,\quad \forall\ \psi \in \mathcal{D}_{per}(Y_o).$$

En utilisant le fait que $\underline{\mathcal{D}}_{per}(Y_o)$ est dense dans $\underline{H}^1_{oper}(Y_o)$ (cf. Proposition 7.5) on voit sans difficulté que (8.53) peut se prolonger continûment à $\underline{H}^1_{oper}(Y_o)$, i.e.

$$(u,v)_{\underline{H}^1_{oper}(Y_o)} = \int_{Y_o} p.\ \mathrm{div}\ v\ dy,\ \forall v \in \underline{H}^1_{oper}(Y_o)$$

d'où $(u,v)_{\underline{H}^1_{oper}(Y_o)} = 0 \quad \forall v \in V_{per}(Y_o)$, donc $u = 0$. Ce qu'il fallait démontrer. □

On va conclure ce n° 8.3 par le résultat complémentaire suivant :

<u>Proposition 8.4.</u> : L'application linéaire div (continue de $\underline{H}^1_{oper}(Y_o)$, et plus généralement, de $\underline{H}^1(Y_o)$ dans $L^2(Y_o)$) est une surjection de $\underline{H}^1_{oper}(Y_o)$ sur $L^2(Y_o)/\mathbb{R}$; et il existe un relèvement linéaire continu, i.e.

Il existe $E \in \mathcal{L}\ (L^2(Y_o)/\mathbb{R}\ ,\ \underline{H}^1_{oper}(Y_o))$ tel que

$E\ (\mathrm{div}\ u) = u \quad \forall u \in \underline{H}^1_{oper}(Y_o)$

<u>Démonstration</u> : La surjection se déduit du fait que l'application div est surjective de $\underline{H}^1_o(Y_o)$ sur $L^2(Y_o)/\mathbb{R}$ (cf. R. Témam [1]), et $\underline{H}^1_o(Y_o) \subset \underline{H}^1_{oper}(Y_o)$.
L'existence d'un relèvement E résulte du fait que l'application div est continue et bijective de $(V_{per}(Y_o))^{\perp}$ sur $L^2(Y_o)/\mathbb{R}$, car $V_{per}(Y_o)$ = noyau de div ($(V_{per}(Y_o))^{\perp}$ = orthogonal de $V_{per}(Y_o)$ dans $\underline{H}^1_{oper}(Y_o)$).
Il suffit alors de raisonner comme dans la démonstration du Théorème 7.1. □

8.4. <u>Conclusion</u>

Nous allons appliquer les résultats précédents à l'étude des problèmes aux limites du type "Stokes-périodique" sur Y_o. Ainsi que nous l'avons souligné dans l'introduction, le cadre fonctionnel approprié se situe dans l'espace des distributions $\mathcal{D}'_{per}(Y_o)$. Une fois que sont précisés les espaces fonctionnels associés à l'étude du problème, la démarche suivie (formulation variationnelle et interprétation) est analogue à celle détaillée dans R. Témam [1] . Aussi nous contenterons-nous d'indiquer les résultats relatifs à ce type de problèmes, les techniques développées par R. Témam [1] étant facilement adaptables à notre situation (moyennant un choix convenable des espaces fonctionnels qui entrent en jeu ; cf. n° 7.4 et les numéros 8.1 - 8.3 de ce paragraphe).

- Problème du type Stokes périodique homogène

On a la

Proposition 8.5. : Soit $\nu \in \mathbb{R}$, $\nu \neq 0$; et soit $f \in \underline{H}^{-1}_{per}(Y_o)$ (cf. n° 8.3), $f = (f_i)$. Alors il existe $u \in \underline{H}^1_{oper}(Y_o)$ et $p \in L^2(Y_o)/\mathbb{R}$ solution du problème :

$$- e_{ij,j}(u) + \nu \frac{\partial p}{\partial y_i} = f_i \quad \text{dans} \quad Y_o$$

$$\text{div } u = 0 \quad \text{dans} \quad Y_o$$

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \gamma_o$$

Les fonctions u et p sont uniques.

- Problème du type Stokes-périodique non homogène

Le résultat suivant généralise la Proposition 8.5. :

Proposition 8.6. : On donne $\nu \neq 0$, et $f \in \bar{\underline{H}}^1_{per}(Y_o)$, $f = (f_i)$.
Soit $g \in L^2(Y_o)$ et $\chi \in \underline{H}^{1/2}_{Y_o per}(\gamma_o) = (H^{1/2}_{Y_o per}(\gamma_o))^3$ (cf. n° 7.4) tels que

$$\int_{\gamma_o} \chi . n \, ds - \int_{Y_o} g \, dy = 0$$

(n = normale unitaire extérieure à Y_o).
Alors il existe $u \in \underline{H}^1_{per}(Y_o)$ et $p \in L^2(Y_o)/\mathbb{R}$ solution du problème :

$$- e_{ij,j}(u) + \nu \frac{\partial p}{\partial y_i} = f_i \quad \text{dans} \quad Y_o$$

$$\text{div } u = g \quad \text{dans} \quad Y_o$$

$$u = \chi \quad \text{sur} \quad \gamma_o .$$

Les fonctions u et p sont uniques, et on a

(8.54) $$\| u \|_{\underline{H}^1_{per}(Y_o)} \leq c(\| \underline{f} \|_{\underline{H}^{-1}_{per}(Y_o)} + \| g \|_{L^2(Y_o)} + \| \chi \|_{\underline{H}^{1/2}_{Y_o per}(Y_o)})$$

(8.55) $$\| p \|_{L^2(Y_o)/\mathbb{R}} \leq c(\| f \|_{\underline{H}^{-1}_{per}(Y_o)} + \| g \|_{L^2(Y_o)} + \| \chi \|_{\underline{H}^{1/2}_{Y_o per}(Y_o)})$$

où c est une constante positive.

<u>Remarque 8.4.</u> : La démonstration de la Proposition 8.6, et notamment des inégalités (8.54), (8.55) est détaillée dans Nguetseng [2] .

<u>Remarque 8.5.</u> : Dans les Propositions 8.5 et 8.6 on note

$$e_{ij,j}(u) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial e_{ij}}{\partial y_j}(u), \quad e_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j}{\partial y_i}\right) .$$

Ces résultats subsistent si $e_{ij,j}(u)$ est remplacé par Δu_i.

BIBLIOGRAPHIE

A. BENSOUSSAN, J.L. LIONS, G. PAPANICOLAOU

[1] "Asymptotic Analysis for Periodic Structures". North-Holland, Amsterdam (1978).

T. KATO [1] "Perburbation Theory for Linear Operators", Springer, Berlin, 2nd edition (1976).

J.L. LIONS

[1] "Perburbations Singulières dans les Problèmes aux Limites et en Contrôle Optimal", Lecture Notes in Mathematics, Vol. 323 (1978).

J.L. LIONS, E. MAGENES

[1] "Problèmes aux Limites non Homogènes et applications", Vol. 1, Dunod, Paris (1968).

G. NGUETSENG

[1] "Problème Raide Périodique et Application à l'étude des Coefficients Homogénéisés pour un Mélange de Fluide et Solide", Compt. Rend. Acad. Sci., Paris, sér. I 262 (à paraître).

[2] A paraître.

E. SANCHEZ-PALENCIA

[1] "Non-homogeneous media and vibration theory", Lecture Notes in Physics, vol. 127 (1980).

L. SCHWARTZ

[1] "Théorie des Distributions", Herman, Paris (1966).

R. TEMAM

[1] "Navier-Stokes Equations", North-Holland, Amsterdam (1977).

VO-KHAC KHOAN

[1] "Distributions, Analyse de Fourier, Opérateurs aux Dérivées Partielles", tome 1, Vuibert, Paris (1972).

[2] "Distributions, Analyse de Fourier, Opérateurs aux Dérivées Partielles, tome 2, Vuiber, Paris (1972).